ANALISI MATEMATICA 1 Area dell'Ingegneria dell'Informazione, Canali 2, 3, 4
Appello del 20.02.2015

TEMA 1

NB: con log si indica il logaritmo in base e.

Esercizio 1 Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{1}{\sin(2x)} e^{-\left(\frac{1}{|\tan(2x)|}\right)}$$

nell'intervallo $[-\pi/2, \pi/2]$.
(a) Si determini il dominio D di f; si determinino i limiti di f agli estremi di D e gli eventuali asintoti; se ne studino la continuità e gli eventuali prolungamenti per continuità;
(b) se ne studi la derivabilità, si calcoli la derivata e si studi la monotonia di f; si determinino gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto e si calcolino i limiti significativi di f';
(c) si dimostri che f è periodica, se ne calcoli il periodo e si disegni un grafico qualitativo di f (ripetendolo per periodicità).

Svolgimento. La funzione è periodica di periodo π: $f(x+\pi) = \frac{1}{\sin(2x+2\pi)} e^{-\left(\frac{1}{|\tan(2x+2\pi)|}\right)} = f(x)$ e dispari. La studiamo perciò nell'intervallo $[0, \pi/2]$
(a) In $[0, \pi/2]$ il dominio D, nel mezzo intervallo considerato, è uguale a $\{x \in [0, \pi/2] : \sin(2x) \neq 0, \cos(2x) \neq 0, 2x \neq \pi/2\} = \{x \in [0, \pi/2] : x \neq 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\}$. I limiti da calcolare sono:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+} f(x) &= \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-\frac{\cos(2x)}{\sin(2x)}}}{\sin(2x)} \quad (\text{ponendo } \sin(2x) = y) \\
&= \lim_{y\to 0^+} \frac{e^{\frac{-1}{y}}}{y} = 0 \quad (\text{questo è un limite fondamentale}) \\
&= \lim_{x\to \pi/2^-} f(x); \\
\lim_{x\to \pi/4} f(x) &= 1.
\end{aligned}$$

Quindi f è prolungabile con continuità a tutto l'intervallo $[0, \pi/2]$.
(b) Le regole di derivazione si possono applicare in D. Risulta

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\frac{\cos(2x)}{\sin(2x)}}}{\sin(2x)} & \text{per } 0 < x < \frac{\pi}{4}, \\[2ex] \dfrac{e^{\frac{\cos(2x)}{\sin(2x)}}}{\sin(2x)} & \text{per } \frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}, \end{cases}$$

per cui

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\frac{\cos(2x)}{\sin(2x)}} \frac{2\sin^2(2x)+2\cos^2(2x)}{\sin^2(2x)} \sin(2x) - 2e^{-\frac{\cos(2x)}{\sin(2x)}} \cos(2x)}{\sin^2(2x)} = \dfrac{e^{-\frac{\cos(2x)}{\sin(2x)}} \big(2-\sin(4x)\big)}{\sin^3(2x)} & \text{per } 0 < x < \frac{\pi}{4}, \\[3ex] \dfrac{-e^{\frac{\cos(2x)}{\sin(2x)}} \frac{2\sin^2(2x)+2\cos^2(2x)}{\sin^2(2x)} \sin(2x) - 2e^{\frac{\cos(2x)}{\sin(2x)}} \cos(2x)}{\sin^2(2x)} = \dfrac{-e^{\frac{\cos(2x)}{\sin(2x)}} \big(2+\sin(4x)\big)}{\sin^3(2x)} & \text{per } \frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Risulta perciò $f'(x) < 0$ per $0 < x < \frac{\pi}{4}$, mentre $f'(x) > 0$ per $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$. Per i limiti di f' si ha

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = 0 \;=\; \lim_{x\to \pi/2^-} f'(x) \quad \text{(questo è il limite fondamentale } \lim_{y\to 0} \frac{e^{-1/|y|}}{y^3} = 0\text{)}$$

$$\lim_{x\to \pi/4^-} f'(x) = 2$$

$$\lim_{x\to \pi/4^+} f'(x) = -2.$$

Quindi $x = 0, \pi/2$ sono punti in cui l'estensione di f è derivabile, con derivata nulla (in realtà sono flessi a tangente orizzontale), mentre $x = \pi/4$ è un punto angoloso, di massimo assoluto.
(c) Il grafico è in Figura 1.

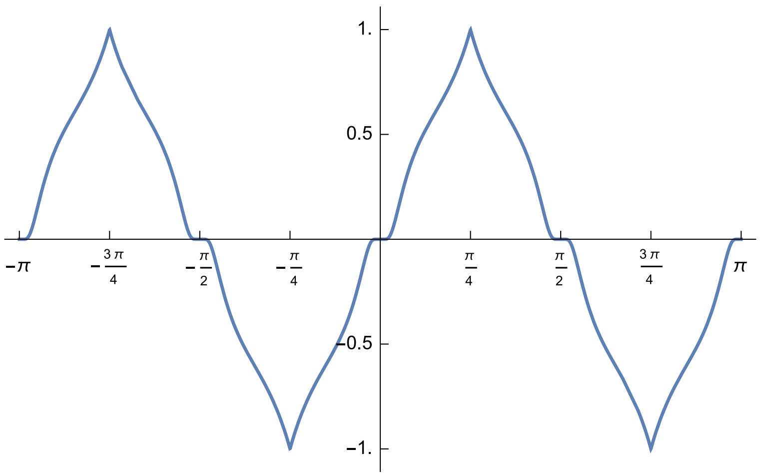


Figura 1: Il grafico di f (Tema 1).

Esercizio 2 (a) Calcolare l'ordine di infinitesimo di

$$e^{x-x^2} - \cos(\alpha x) - \sin x$$

per $x \to 0$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$;
(b) calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x-x^2} - \cos(\alpha x) - \sin x}{\sinh x - \log(1+\sin x)}$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.
Svolgimento. (a) Si ha, per $x \to 0$,

$$\begin{aligned} e^{x-x^2} - \cos(\alpha x) - \sin x &= 1 + x - x^2 + \frac{(x-x^2)^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) \\ &\quad - \Big(1 - \frac{(\alpha x)^2}{2} + o((\alpha x)^3)\Big) - \Big(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\Big) \\ &= x^2\Big(-1 + \frac{1}{2} + \frac{\alpha^2}{2}\Big) + x^3\Big(-1 + \frac{1}{6} + \frac{1}{6}\Big) \\ &= \frac{\alpha^2 - 1}{2}x^2 - \frac{2}{3}x^3 + o(x^3), \end{aligned}$$

quindi l'ordine è due se $\alpha \neq \pm 1$, mentre è tre se $\alpha = \pm 1$.
(b) Per il denominatore si ha, per $x \to 0$,

$$\begin{aligned}\sinh x - \log(1+\sin x) &= x + \frac{x^3}{6} + o(x^3) - \Big(\sin x - \frac{\sin^2 x}{2} + \frac{\sin^3 x}{3} + o(x^3)\Big)\\ &= x + \frac{x^3}{6} + o(x^3) - \Big(x - \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\Big)\\ &= \frac{x^2}{2} + o(x^2).\end{aligned}$$

Quindi il limite è $\alpha^2 - 1$, in particolare vale 0 per $\alpha = \pm 1$.

Esercizio 3 Determinare per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ l'integrale

$$\int_0^1 xe^{2x}\big(e^{2x}-1\big)^{\alpha/2}\,dx$$

converge e calcolarlo per $\alpha = -1$.
Svolgimento. Poniamo $g(x) = xe^{2x}\big(e^{2x}-1\big)^{\alpha/2}$ e osserviamo che, per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, g è continua in $(0,1]$ ed è positiva. Bisogna quindi studiare la convergenza dell'integrale in 0. Si ha, per $x \to 0^+$,

$$g(x) \sim x(2x)^{\alpha/2} = 2^{\alpha/2}x^{1+\alpha/2}.$$

Quindi per il criterio del confronto asintotico l'integrale è convergente se e solo se $1 + \alpha/2 > -1$, cioè se e solo se $\alpha > -4$.
Per $\alpha = -1$ si ha

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{xe^{2x}}{\sqrt{e^{2x}-1}}\,dx &\underset{\text{(per parti)}}{=} x\sqrt{e^{2x}-1}\Big|_0^1 - \int_0^1 \sqrt{e^{2x}-1}\,dx\\ &\underset{\text{(ponendo } e^{2x}-1=t^2\text{, quindi } dx = \frac{t}{1+t^2}dt)}{=} \sqrt{e^2-1} - \int_0^{\sqrt{e^2-1}} \frac{t^2}{1+t^2}\,dt\\ &= \sqrt{e^2-1} - t\Big|_0^{\sqrt{e^2-1}} + \arctan t\Big|_0^{\sqrt{e^2-1}}\\ &= \arctan\sqrt{e^2-1}.\end{aligned}$$

Esercizio 4 Si risolva la disequazione

$$\mathrm{Re}\Big((z+i)^2\Big) \leq \mathrm{Im}\Big(i(\bar{z}-2i)^2\Big) \tag{1}$$

e se ne disegni l'insieme delle soluzioni nel piano di Gauss.
Svolgimento. Posto $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, si ha

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\Big((z+i)^2\Big) &= \mathrm{Re}\Big(x+i(1+y)\Big)^2 = \mathrm{Re}\Big(x^2-(y+1)^2+2ix(y+1)\Big) = x^2-(y+1)^2\\ \mathrm{Im}\Big(i(\bar{z}-2i)^2\Big) &= \mathrm{Im}\Big(i\big(x-i(y+2)\big)^2\Big) = \mathrm{Im}\Big(i\big(x^2-(y+2)^2-2ix(y+2)\big)\Big) = x^2-(y+2)^2,\end{aligned}$$

per cui la disequazione (1) è equivalente a

$$x^2-(y+1)^2 \leq x^2-(y+2)^2,$$

che ha per soluzioni

$$y \leq -\frac{3}{2}.$$

Le soluzioni della disequazione sono perciò il semipiano $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im} z \leq -\frac{3}{2}\}$, visibile in Figura 2.

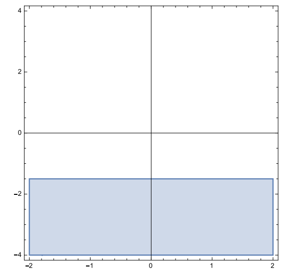


Figura 2: Le soluzioni dell'esercizio 4 (Tema 1).

TEMA 2

Esercizio 1 Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{-1}{\sin(4x)} e^{-\left(\frac{1}{|\tan(4x)|}\right)}$$

nell'intervallo $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$.
(a) Si determini il dominio D di f; si determinino i limiti di f agli estremi di D e gli eventuali asintoti; se ne studino la continuità e gli eventuali prolungamenti per continuità;
(b) se ne studi la derivabilità, si calcoli la derivata e si studi la monotonia di f; si determinino gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto e si calcolino i limiti significativi di f';
(c) si dimostri che f è periodica, se ne calcoli il periodo e si disegni un grafico qualitativo di f (ripetendolo per periodicità).

Svolgimento. La funzione è periodica di periodo $\pi/2$: $f(x+\pi/2) = \frac{1}{\sin(2x+4\pi/2)} e^{-\left(\frac{1}{|\tan(2x+4\pi/2)|}\right)} = f(x)$ e dispari. La studiamo perciò nell'intervallo $[0, \pi/2]$
(a) In $[0, \pi/4]$ il dominio D, nella metà dell'intervallo che stiamo considerando, è uguale a $\{x \in [0, \pi/4] : \sin(4x) \neq 0, \cos(4x) \neq 0, 4x \neq \pi/2\} = \{x \in [0, \pi/4] : x \neq 0, \frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{4}\}$. I limiti da calcolare sono:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+} f(x) &= -\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-\frac{\cos(4x)}{\sin(4x)}}}{\sin(4x)} \quad \text{(ponendo } \sin(4x) = y\text{)} \\
&= \lim_{y\to 0^+} \frac{e^{\frac{-1}{y}}}{y} = 0 \quad \text{(questo è un limite fondamentale)} \\
&= \lim_{x\to \pi/4^-} f(x); \\
\lim_{x\to \pi/8} f(x) &= -1.
\end{aligned}$$

Quindi f è prolungabile con continuità a tutto l'intervallo $[0, \pi/4]$.
(b) Le regole di derivazione si possono applicare in D. Risulta

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{-e^{-\frac{\cos(4x)}{\sin(4x)}}}{\sin(4x)} & \text{per } 0 < x < \frac{\pi}{8}, \\[2ex] \dfrac{-e^{\frac{\cos(4x)}{\sin(4x)}}}{\sin(4x)} & \text{per } \frac{\pi}{8} < x < \frac{\pi}{4}, \end{cases}$$

per cui

$$f'(x) = \begin{cases} -\dfrac{e^{-\frac{\cos(4x)}{\sin(4x)}} \frac{4\sin^2(4x)+4\cos^2(4x)}{\sin^2(4x)} \sin(4x) - 4e^{-\frac{\cos(4x)}{\sin(4x)}} \cos(4x)}{\sin^2(4x)} = \dfrac{2e^{-\frac{\cos(4x)}{\sin(4x)}}\big(\sin(8x)-2\big)}{\sin^3(4x)} & \text{per } 0 < x < \frac{\pi}{8}, \\ \\ -\dfrac{-e^{\frac{\cos(4x)}{\sin(4x)}} \frac{4\sin^2(4x)+4\cos^2(4x)}{\sin^2(4x)} \sin(4x) - 4e^{\frac{\cos(4x)}{\sin(4x)}} \cos(4x)}{\sin^2(4x)} = \dfrac{2e^{\frac{\cos(4x)}{\sin(4x)}}\big(2+\sin(8x)\big)}{\sin^3(4x)} & \text{per } \frac{\pi}{8} < x < \frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

Risulta perciò $f'(x) < 0$ per $0 < x < \frac{\pi}{8}$, mentre $f'(x) > 0$ per $\frac{\pi}{8} < x < \frac{\pi}{4}$. Per i limiti di f' si ha

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to 0^+} f'(x) = 0 \ = \lim_{x\to \pi/4^-} f'(x) \quad \left(\text{questo è il limite fondamentale } \lim_{y\to 0} \frac{e^{-1/|y|}}{y^3} = 0\right) \\ &\lim_{x\to \pi/8^-} f'(x) = -2 \\ &\lim_{x\to \pi/8^+} f'(x) = 2. \end{aligned}$$

Quindi $x = 0, \pi/4$ sono punti in cui l'estensione di f è derivabile, con derivata nulla (in realtà sono flessi a tangente orizzontale), mentre $x = \pi/8$ è un punto angoloso, di minimo assoluto.
(c) Il grafico è in Figura 3.

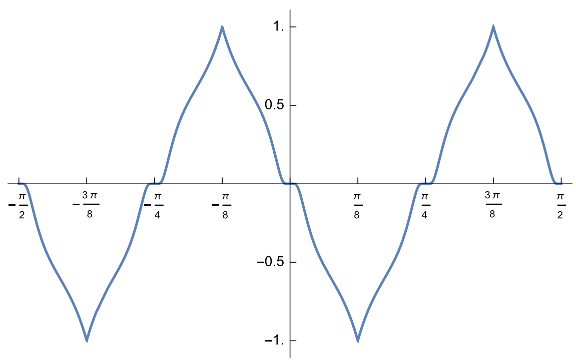


Figura 3: Il grafico di f (Tema 2).

Esercizio 2 (a) Calcolare l'ordine di infinitesimo di

$$1 + \log(1 + x + x^2) - \cosh(\alpha x) - \sinh x$$

per $x \to 0$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$;
(b) calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 + \log(1 + x + x^2) - \cosh(\alpha x) - \sinh x}{\log(1 + \arctan x) - \sinh x}$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.
Svolgimento. (a) Si ha, per $x \to 0$,

$$\begin{aligned} 1 + \log(1 + x + x^2) - \cosh(\alpha x) - \sinh x &= 1 + x + x^2 - \frac{(x + x^2)^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \\ &\quad - \Big(1 + \frac{(\alpha x)^2}{2} + o((\alpha x)^3)\Big) - \Big(x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\Big) \\ &= x^2\Big(1 - \frac{1}{2} - \frac{\alpha^2}{2}\Big) + x^3\Big(-1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{6}\Big) + o(x^3) \\ &= \frac{1-\alpha^2}{2}x^2 - \frac{5}{6}x^3 + o(x^3), \end{aligned}$$

quindi l'ordine è due se $\alpha \neq \pm 1$, mentre è tre se $\alpha = \pm 1$.
(b) Per il denominatore si ha, per $x \to 0$,

$$\begin{aligned}\log(1+\arctan x) - \sinh x &= \arctan x - \frac{\arctan^2 x}{2} + \frac{\arctan^3 x}{3} + o(x^3) - \Big(x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\Big) \\ &= x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) - \Big(x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\Big) \\ &= -\frac{x^2}{2} + o(x^2).\end{aligned}$$

Quindi il limite è $\alpha^2 - 1$, in particolare vale 0 per $\alpha = \pm 1$.

Esercizio 3 Determinare per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ l'integrale

$$\int_0^1 x e^{x/2} \big(e^{x/2} - 1\big)^{2\alpha}\, dx$$

converge e calcolarlo per $\alpha = -1/4$.
Svolgimento. Poniamo $g(x) = x e^{x/2}\big(e^{x/2} - 1\big)^{2\alpha}$ e osserviamo che, per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, g è continua in $(0, 1]$ ed è positiva. Bisogna quindi studiare la convergenza dell'integrale in 0. Si ha, per $x \to 0^+$,

$$g(x) \sim x \Big(\frac{x}{2}\Big)^{2\alpha} = 2^{-2\alpha} x^{1+2\alpha}.$$

Quindi per il criterio del confronto asintotico l'integrale è convergente se e solo se $1 + 2\alpha > -1$, cioè se e solo se $\alpha > -1$.
Per $\alpha = -1/4$ si ha

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x e^{x/2}}{\sqrt{e^{x/2} - 1}}\, dx &\underset{\text{(per parti)}}{=} 4x\sqrt{e^{x/2} - 1}\Big|_0^1 - 4\int_0^1 \sqrt{e^{x/2} - 1}\, dx \\ &\underset{\text{(ponendo } e^{x/2} - 1 = t^2\text{, quindi } dx = \frac{4t}{1+t^2} dt)}{=} 4\sqrt{e^{1/2} - 1} - 16\int_0^{\sqrt{e^{1/2}-1}} \frac{t^2}{1+t^2}\, dt \\ &= 4\sqrt{e^{1/2} - 1} - 16t\Big|_0^{\sqrt{e^{1/2}-1}} + 16\arctan t\Big|_0^{\sqrt{e^{1/2}-1}} \\ &= -12\sqrt{e^{1/2} - 1} + 16\arctan\sqrt{e^{1/2} - 1}.\end{aligned}$$

Esercizio 4 Si risolva la disequazione

$$\mathrm{Re}\Big((z - 2i)^2\Big) \geq \mathrm{Im}\Big(i(\bar{z} + i)^2\Big)$$

e se ne disegni l'insieme delle soluzioni nel piano di Gauss.
Svolgimento. Posto $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, si ha

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\Big((z - 2i)^2\Big) &= \mathrm{Re}\Big(x + i(y-2)\Big)^2 = \mathrm{Re}\Big(x^2 - (y-2)^2 - 2ix(y-2)\Big) = x^2 - (y-2)^2 \\ \mathrm{Im}\Big(i(\bar{z} + i)^2\Big) &= \mathrm{Im}\Big(i\big(x + i(1-y)\big)^2\Big) = \mathrm{Im}\Big(i\big(x^2 - (1-y)^2 + 2ix(1-y)\big)\Big) = x^2 - (1-y)^2,\end{aligned}$$

per cui la disequazione (1) è equivalente a

$$x^2 - (y-2)^2 \geq x^2 - (1-y)^2,$$

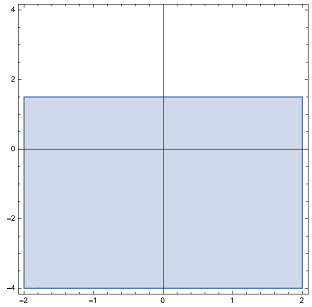


Figura 4: Le soluzioni dell'esercizio 4 (Tema 2).

che ha per soluzioni

$$y \geq \frac{3}{2}.$$

Le soluzioni della disequazione sono perciò il semipiano $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im} z \leq \frac{3}{2}\}$, visibile in Figura 4.

TEMA 3

Esercizio 1 Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{1}{\sin(x/2)} e^{-\left(\frac{1}{|\tan(x/2)|}\right)}$$

nell'intervallo $[-2\pi, 2\pi]$.
(a) Si determini il dominio D di f; si determinino i limiti di f agli estremi di D e gli eventuali asintoti; se ne studino la continuità e gli eventuali prolungamenti per continuità;
(b) se ne studi la derivabilità, si calcoli la derivata e si studi la monotonia di f; si determinino gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto e si calcolino i limiti significativi di f';
(c) si dimostri che f è periodica, se ne calcoli il periodo e si disegni un grafico qualitativo di f (ripetendolo per periodicità).
Svolgimento.

La funzione è periodica di periodo 4π: $f(x+4\pi) = \frac{1}{\sin(\frac{x+4\pi}{2})} e^{-\left(\frac{1}{|\tan((\frac{x+4\pi}{2}))|}\right)} = f(x)$, inoltre è dispari. La studiamo perciò nell'intervallo $[0, 2\pi]$, dove la funzione è non negativa. (a) In $[0, 2\pi]$ il dominio D, nel mezzo intervallo considerato, è uguale a $\{x \in [0, 2\pi] : \sin(x/2) \neq 0, \cos(x/2) \neq 0\} = \{x \in [0, 2\pi] : x \neq 0, \pi, 2\pi\}$. I limiti da calcolare sono:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+} f(x) &= \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{\tan(x/2)}}}{\sin(x/2)} = \\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\cos(x/2)} \frac{e^{-\frac{1}{\tan(x/2)}}}{\tan(x/2)} \quad \text{(ponendo } \tan(x/2) = y\text{)} \\
&= \lim_{y\to 0^+} \frac{e^{\frac{-1}{y}}}{y} = 0 \quad \text{(questo è un limite fondamentale)} \\
&= \lim_{x\to 2\pi^-} f(x)
\end{aligned}$$

Il terzo limite è:

$$\lim_{x\to\pi} f(x) = 1.$$

Quindi f è prolungabile con continuità a tutto l'intervallo $[0, 2\pi]$.
(b) Le regole di derivazione si possono applicare in D. Risulta

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\frac{\cos(x/2)}{\sin(x/2)}}}{\sin(x/2)} & \text{per } 0 < x < \pi, \\[2ex] \dfrac{e^{\frac{\cos(x/2)}{\sin(x/2)}}}{\sin(x/2} & \text{per } \pi < x < 2\pi, \end{cases}$$

per cui

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\frac{\cos(x/2)}{\sin(x/2)}} \frac{1/2 \sin^2(x/2) + 1/2 \cos^2(x/2)}{\sin^2(x/2)} \sin(2x) - \frac{1}{2} e^{-\frac{\cos(x/2)}{\sin(x/2)}} \cos(x/2)}{\sin^2(x/2)} = \dfrac{1}{4} \dfrac{e^{-\frac{\cos(x/2)}{\sin(x/2)}} \big(2 - \sin(x)\big)}{\sin^3(x/2)} & \text{per } 0 < x < \pi, \\[3ex] \dfrac{-e^{\frac{\cos(x/2)}{\sin(x/2)}} \frac{1/2 \sin^2(x/2) + 1/2 \cos^2(x/2)}{\sin^2(x/2)} \sin(2x) - \frac{1}{2} e^{\frac{\cos(x/2)}{\sin(x/2)}} \cos(x/2)}{\sin^2(x/2)} = -\dfrac{1}{4} \dfrac{e^{\frac{\cos(x/2)}{\sin(x/2)}} \big(2 + \sin(x)\big)}{\sin^3(x/2)} & \text{per } \pi < x < 2\pi,. \end{cases}$$

Risulta perciò $f'(x) > 0$ per $0 < x < \pi$, mentre $f'(x) < 0$ per $\pi < x < 2\pi$. Per i limiti di f' si ha

$$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = 0 \;=\; \lim_{x \to 2\pi^-} f'(x) \quad \text{(questo è il limite fondamentale } \lim_{y \to 0} \frac{e^{-1/|y|}}{y^3} = 0\text{)}$$
$$\lim_{x \to \pi^-} f'(x) = 1/2$$
$$\lim_{x \to \pi^+} f'(x) = -1/2.$$

Quindi $x = 0$ e $x = 2\pi$ sono punti in cui l'estensione di f è derivabile, con derivata nulla (in realtà sono flessi a tangente orizzontale), mentre $x = \pi$ è un punto angoloso, di massimo assoluto.
(c) Il grafico è in Figura 5.

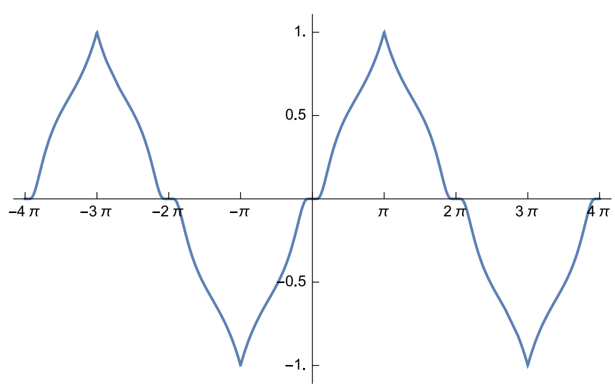


Figura 5: Il grafico di f (Tema 3).

Esercizio 2 [9 punti] (a) Calcolare l'ordine di infinitesimo di

$$\arctan x - e^{x^2+x} + \cosh(\alpha x)$$

per $x \to 0$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$;
(b) calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arctan x - e^{x^2+x} + \cosh(\alpha x)}{\sin x + \log(1-\sinh x)}$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.
Svolgimento.

(a) Utilizzando gli sviluppi di Taylor si ha, per $x \to 0$:

$$\arctan x - e^{x^2+x} + \cosh(\alpha x) =$$

$$= x - \frac{x^3}{3} + o(x^3) - \left[1 + \left(x+x^2\right) + \frac{1}{2}\left(x+x^2\right)^2 + \frac{1}{6}\left(x+x^2\right)^3 + o\left(\left(x+x^2\right)^3\right)\right] + 1 + \frac{1}{2}(\alpha x)^2 + o\left((\alpha x)^3\right) =$$

$$= x - \frac{x^3}{3} - 1 - x - x^2 - \frac{1}{2}x^2 - x^3 - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) + 1 + \frac{1}{2}\alpha^2 x^2 + o(\alpha^3 x^3) = \frac{1}{2}(\alpha^2 - 3)x^2 - \frac{3}{2}x^3 + o(x^3) + o\left((\alpha x)^3\right).$$

quindi l'ordine è due se $\alpha \neq \pm\sqrt{3}$, mentre è tre se $\alpha = \pm\sqrt{3}$.

(b) Utilzzando sempre gli sviluppi di Taylor si ha:

$$\sin x + \log(1 - \sinh x) = x + o(x^2) + \log\left(1 - [x + o(x^2)]\right) =$$

$$= x + o(x^2) - \left(x + o(x^2)\right) - \frac{1}{2}\left(x + o(x^2)\right)^2 + o\left(\left(x + o(x^2)\right)^2\right) = -\frac{1}{2}x^2 + o(x^2).$$

Quindi si ha:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arctan x - e^{x^2+x} + \cosh(\alpha x)}{\sin x + \log(1-\sinh x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2}(\alpha^2-3)x^2 - \frac{3}{2}x^3 + o(x^3) + o\left((\alpha x)^3\right)}{-\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)} = 3 - \alpha^2$$

Esercizio 3 Determinare per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ l'integrale

$$\int_0^{1/2} \frac{xe^{3x}}{(e^{3x}-1)^{\alpha/4}}\,dx$$

converge e calcolarlo per $\alpha = 2$.
Svolgimento.

Poniamo $g(x) = \frac{xe^{3x}}{(e^{3x}-1)^{\alpha/4}}$ e osserviamo che, per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, g è continua in $(0,1]$ ed è positiva. Bisogna quindi studiare la convergenza dell'integrale in 0. Si ha, per $x \to 0^+$,

$$g(x) = \frac{xe^{3x}}{(3x + o(x))^{\alpha/4}} \sim \left(\frac{1}{3^{\alpha/4}}\right)\frac{1}{x^{\frac{\alpha}{4}-1}}$$

Quindi $g(x)$ è integrabile in $x = 0$ se e solo se $\frac{\alpha}{4} - 1 < 1$ quindi, se e solo se $\alpha < 8$.

Fissiamo ora $\alpha = 2$, si ha:

$$\int_0^{1/2} \frac{xe^{3x}}{\sqrt{e^{3x}-1}}\,dx$$

Una primitiva di $\frac{e^{3x}}{\sqrt{e^{3x}-1}}$ è $\frac{2}{3}\sqrt{e^{3x}-1}$. Integrando per parti si ha:

$$\int \frac{xe^{3x}}{\sqrt{e^{3x}-1}}\,dx = \frac{2}{3}x\sqrt{e^{3x}-1} - \frac{2}{3}\int \sqrt{e^{3x}-1}dx.$$

Utilizzando la sostituzione $y^2 = e^{3x}-1$ si ha:

$$\int \sqrt{e^{3x}-1}dx = \frac{2}{3}\int \frac{y^2}{y^2+1}dy = \frac{2}{3}\int \left(1-\frac{1}{y^2+1}\right)dy = \frac{2}{3}(y-\arctan(y)) + \text{cost.}$$

Tornado alla variabile x si ha:

$$\int \frac{xe^{3x}}{\sqrt{e^{3x}-1}}\,dx = \frac{2}{3}x\sqrt{e^{3x}-1} - \frac{4}{9}\sqrt{e^{3x}-1} + \frac{4}{9}\arctan\sqrt{e^{3x}-1} + \text{cost.}$$

Da cui

$$\int_0^{1/2} \frac{xe^{3x}}{\sqrt{e^{3x}-1}}\,dx = -\frac{1}{9}\sqrt{e^{3/2}-1} + \frac{4}{9}\arctan\sqrt{e^{3/2}-1}$$

Esercizio 4 Si risolva la disequazione

$$\text{Im}\Big(i(\bar{z}-i+2)^2\Big) \leq \text{Re}\Big((z-1+i)^2\Big)$$

e se ne disegni l'insieme delle soluzioni nel piano di Gauss.
Svolgimento.
Sia $z = x+iy$, quindi $\bar{z} = x-iy$. Si ha:

$$\text{Im}\Big(i(\bar{z}-i+2)^2\Big) = \text{Im}\Big(i\,[(x+2)-i(y+1)]^2\Big) = \text{Im}\Big(i\,\big[(x+2)^2-(y+1)^2-2i(x+2)(y+1)\big]\Big) = (x+2)^2-(y+1)^2$$

$$\text{Re}\Big((z-1+i)^2\Big) = \text{Re}\Big(\,[(x-1)^2+i(y+1)^2]\,\Big) = \text{Re}\Big((x-1)^2-(y+1)^2+2i(x-1)(y+1)\Big) = (x-1)^2-(y+1)^2$$

Quindi dobbiamo avere:

$$(x+2)^2-(y+1)^2 \leq (x-1)^2-(y+1)^2,$$
$$x^2+4+4x \leq x^2+1-2x$$
$$x \leq -\frac{1}{2}$$

Le soluzioni della disequazione sono perciò il semipiano $\{z \in \mathbb{C} : \text{Re}z \leq -\frac{1}{2}\}$ (vedi la figura (6)).

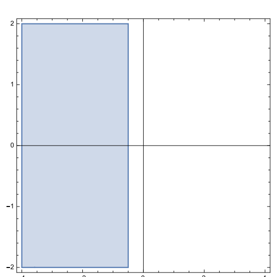


Figura 6: Soluzioni esercizio 4, Tema 3.

ANALISI MATEMATICA 1

Area dell'Ingegneria dell'Informazione, Canali 2, 3, 4

Appello del 20.02.2015

TEMA 4

Esercizio 1 [9 punti] Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{-1}{\sin(x/3)} e^{-\left(\frac{1}{|\tan(x/3)|}\right)}$$

nell'intervallo $[-3\pi, 3\pi]$.
(a) Si determini il dominio D di f; si determinino i limiti di f agli estremi di D e gli eventuali asintoti; se ne studino la continuità e gli eventuali prolungamenti per continuità;
(b) se ne studi la derivabilità, si calcoli la derivata e si studi la monotonia di f; si determinino gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto e si calcolino i limiti significativi di f';
(c) si dimostri che f è periodica, se ne calcoli il periodo e si disegni un grafico qualitativo di f (ripetendolo per periodicità).

Esercizio 2 [9 punti] Calcolare

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(\alpha x - x^2) + \tan x - \log(1+x) - 1}{\log(1+\sin x) - \arctan x}$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Esercizio 3 [9 punti] Determinare per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ l'integrale

$$\int_0^1 \frac{x e^{x/3}}{(e^{x/3}-1)^{2\alpha}}\, dx$$

converge e calcolarlo per $\alpha = 1/4$.

Esercizio 4 [5 punti] Si risolva la disequazione

$$\mathrm{Im}\Big(i(\bar{z} + i - 1)^2\Big) \geq \mathrm{Re}\Big((z-2-i)^2\Big)$$

e se ne disegni l'insieme delle soluzioni nel piano di Gauss.

NB: con log si indica il logaritmo in base e.

Tempo a disposizione: tre ore. Il candidato deve consegnare questo foglio assieme al foglio intestato. Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. È vietato usare libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo. Ogni affermazione deve essere adeguatamente giustificata.

TEMA 4 COMPITO DI ANALISI 1 - ING 20/02/2015

ESERCIZIO 1

Funzione

$$f(x) = -\frac{1}{\sin(x/3)}\, e^{-\frac{1}{|tg(x/3)|}}$$

su $[-3\pi, 3\pi]$.

- Dominio. Deve essere:

$- \sin(x/3) \neq 0 \iff x/3 \neq k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

$\iff x \neq 3k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

$\iff x \neq -3\pi, 0, 3\pi$

$- tg(x/3) \neq 0 \iff$ come sopra

$- tg(x/3)$ definito $\iff x/3 \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

$\iff x \neq \frac{3}{2}\pi + 3k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

$\iff x \neq \frac{3}{2}\pi, -\frac{3}{2}\pi$

$D(f) = [-3\pi, 3\pi] \setminus \left\{ x = k\frac{3\pi}{2} : k = -2, -1, 0, 1, 2 \right\}$

- Simmetrie: f è dispari, $f(-x) = -f(x)$.

Nel seguito: studiamo f su $[0, 3\pi]$

- Limiti:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} -\frac{1}{\sin(x/3)}\, e^{-\frac{1}{|tg(x/3)|}}$$

$$= \lim_{t \to 0} -\frac{1}{t}\, e^{-\frac{1}{|t|}} = 0 \quad \text{NOTO}$$

$$\lim_{x \to \frac{3}{2}\pi} f(x) = \lim_{x \to \frac{3}{2}\pi} - \frac{1}{\sin(x/3)} e^{-\frac{1}{|tg(x/3)|}} = -e^{-0} = -1$$

$$\lim_{x \to 3\pi} f(x) = \lim_{x \to 3\pi} - \frac{1}{\sin(x/3)} e^{-\frac{1}{|tg(x/3)|}} = 0$$

- Asintoti : Non ci sono
- Continuità : f continua nel dominio $D(f)$
- Prolungamento : Ponendo

$$f(0) = f(3\pi) = 0 \qquad \text{e poi per simmetria}$$
$$f\left(\tfrac{3}{2}\pi\right) = -1 \qquad \text{e " " "}$$

Si ottiene una funzione continua su $[-3\pi, 3\pi]$

- Derivabilità : f derivabile in $D(f)$.

Punti $x = 0, \frac{3}{2}\pi, 3\pi$ da guardare con cura

- Derivata :

$$f'(x) = \left(\frac{-1}{\sin(x/3)} e^{-\frac{1}{|tg(x/3)|}} \right)'$$

$$= -e^{-\frac{1}{|tg(x/3)|}} \left\{ \frac{-\cos(x/3)}{\sin^2(x/3)} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{\sin(x/3)} \cdot (-1) \frac{1}{|tg(x/3)|} \cdot \right.$$

$$\left. \cdot (-1) \frac{tg(x/3)}{|tg(x/3)|} \cdot \frac{1}{\cos^2(x/3)} \cdot \frac{1}{3} \right\}$$

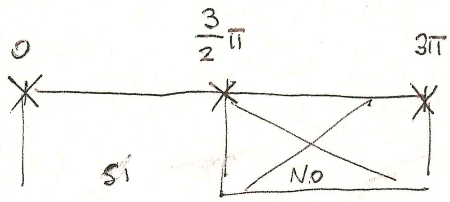
$$f'(x) = \frac{1}{3}\,\frac{e^{-\frac{1}{|tg(x/3)|}}}{\sin^2(x/3)}\left\{\cos(x/3) - \frac{1}{\sin(x/3)}\cdot\frac{tg(x/3)}{|tg(x/3)|}\right\}$$

- Monotonia. Abbiamo

$$f'(x) \geq 0 \iff \cos(x/3) - \frac{1}{\sin(x/3)}\cdot\frac{tg(x/3)}{|tg(x/3)|} \geq 0$$

1° CASO: $tg(x/3) \geq 0 \iff k\pi \leq \frac{x}{3} \leq \frac{\pi}{2} + k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

$\iff x \in [0, \frac{3}{2}\pi]$ (Studiamo solo su $[0,3\pi]$)



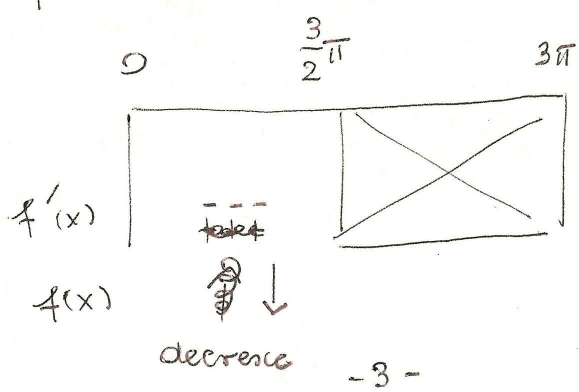
$$f'(x) \geq 0 \iff \cos(x/3) - \frac{1}{\sin(x/3)} \geq 0$$

≤ 0 NEGATIVO

$$\iff \frac{\sin(x/3)\cos(x/3) - 1}{\sin(x/3)} \geq 0$$

> 0

Dunque $f'(x) < 0 \quad \forall x \in (0, \frac{3}{2}\pi)$



$\underline{2^\circ \text{ CASO}}$: $\quad tg(x/3) \leq 0 \iff -\frac{\pi}{2} + k\pi \leq \frac{x}{3} \leq k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

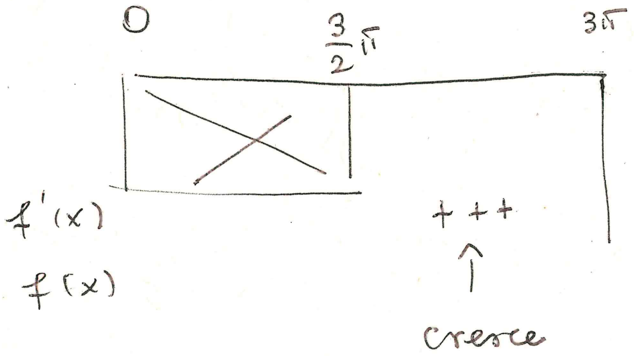
$\iff x \in \left[\frac{3}{2}\pi, 3\pi\right]$ (estremi esclusi)

$$f'(x) \geq 0 \iff \cos(x/3) + \frac{1}{\sin(x/3)} \geq 0$$

$$\iff \frac{\sin(x/3)\cos(x/3) + 1}{\sin(x/3)} \geq 0$$

$\iff$ sempre nell' intervallo $\left[\frac{3}{2}\pi, 3\pi\right]$

Dunque $\quad f'(x) > 0 \quad \forall x \in \left(\frac{3}{2}\pi, 3\pi\right)$



• Limiti di $f'(x)$

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{x \to 0} \frac{1}{3} \frac{e^{-\frac{1}{|tg(x/3)|}}}{\sin^2(x/3)} \left\{ \cos(x/3) - \frac{1}{\sin(x/3)} \frac{tg(x/3)}{|tg(x/3)|} \right\}$$

$= 0 \quad$ è del tipo $\displaystyle \lim_{t\to 0} \frac{1}{t^2} e^{-\frac{1}{|t|}}$

$\displaystyle \pm \lim_{t \to 0} \frac{1}{t^3} e^{-\frac{1}{|t|}} = 0$

Analogamente: $\lim_{x \to 3\pi} f'(x) = 0$

$$\lim_{x \to \frac{3}{2}\pi^-} f'(x) = \lim_{x \to \frac{3}{2}\pi^-} \frac{1}{3} \frac{e^{-\frac{1}{|tg(x/3)|}}}{\sin^2(x/3)} \left\{ \cos(x/3) - \frac{1}{\sin(x/3)} \right\}$$

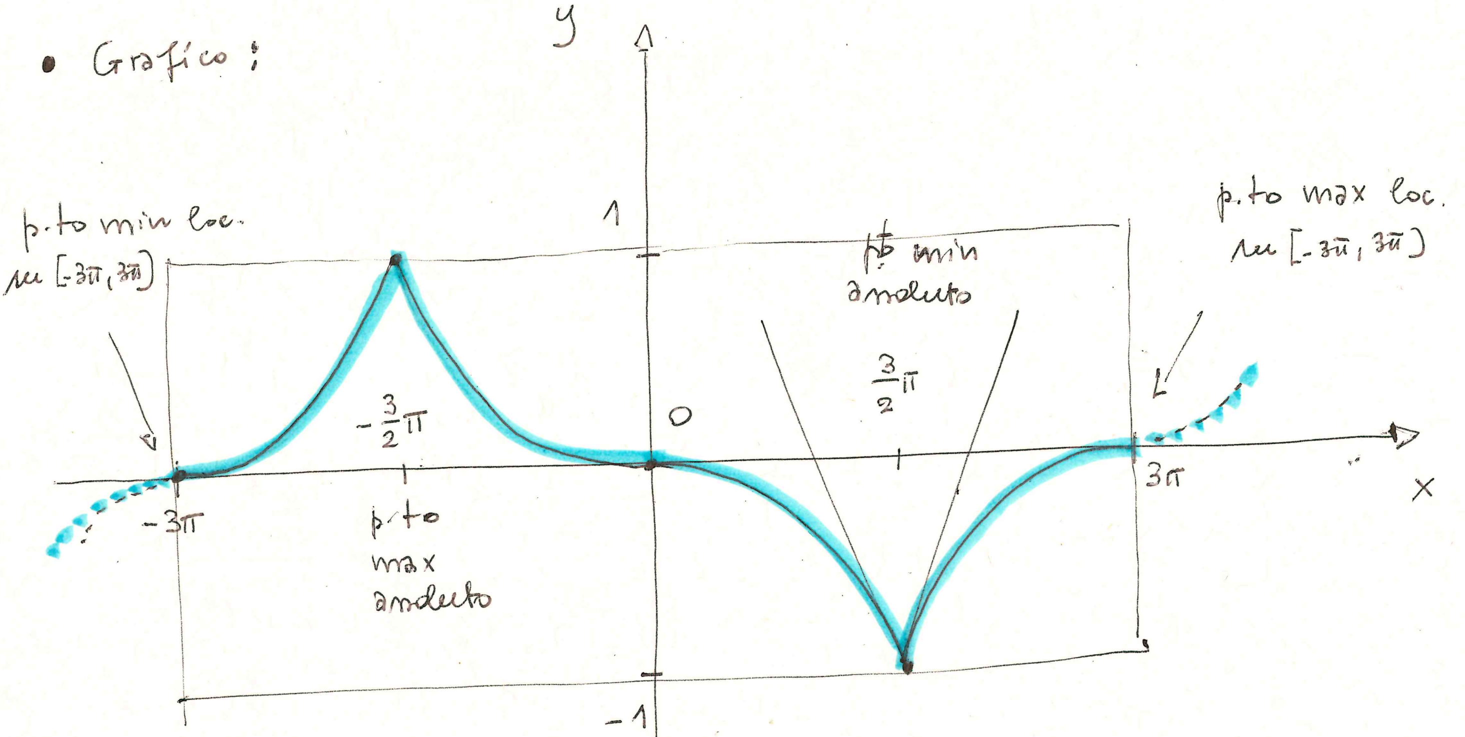
$$= -\frac{1}{3}$$

Analog:

$$\lim_{x \to \frac{3}{2}\pi^+} f'(x) = +\frac{1}{3}$$

Dunque $x = \frac{3}{2}\pi$ è un p.to di angolo

• Grafico:



Esercizio 2 $\quad \alpha \in \mathbb{R}$, limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(\alpha x - x^2) + \operatorname{tg} x - \log(1+x) - 1}{\log(1+\sin x) - \operatorname{arctg} x} = L$$

Svolgimento. Sviluppi infinitesimali:

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{4!}x^4 + o(x^4)$$

Mi fermo all'ordine 3:

$$\cos(\alpha x - x^2) = 1 - \frac{1}{2}(\alpha x - x^2)^2 + o(x^3)$$

$$= 1 - \frac{1}{2}(\alpha^2 x^2 + x^4 - 2\alpha x^3) + o(x^3)$$

$$= 1 - \frac{\alpha^2}{2}x^2 + \alpha x^3 + o(x^3) \qquad x \to 0.$$

Mi ricavo lo sviluppo

$$\operatorname{tg} x = x + Ax^3 + o(x^3) \qquad x \to 0$$

con $A \in \mathbb{R}$ da determinare:

$$A = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x^3}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^3} \frac{\sin x - x\cos x}{\cos x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^3}\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) - x\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)\right)$$

$$= -\frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{3-1}{6} = \frac{1}{3}$$

Dunque $\quad \operatorname{tg} x = x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3) \qquad x \to 0.$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

Numeratore:

$$N(x) = \cancel{1} - \underbrace{\frac{\alpha^2}{2}x^2} + \alpha x^3 + o(x^3) \boxed{\cancel{+x}} + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$$

$$\boxed{\cancel{-x}} + \underbrace{\frac{x^2}{2}} - \frac{x^3}{3} + o(x^3) \cancel{-1}$$

$$= x^2\left(-\frac{\alpha^2}{2} + \frac{1}{2}\right) + x^3\left(\alpha + \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\right) + o(x^3)$$

$$= \frac{1}{2}(-\alpha^2+1)\,x^2 + \alpha x^3 + o(x^3)$$

L'ordine è sempre 2 quando $\alpha^2 \neq 1$. Se $\alpha^2 = 1$ l'ordine è 3.

$$\log(1+\sin x) = \sin x - \frac{1}{2}\sin^2 x + o(\sin^2 x)$$

$$= x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$$

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$$

$$= x + o(x^2)$$

Denominatore:

$$D(x) = -\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$$

$$L = \lim_{x\to 0}\frac{N(x)}{D(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}(-\alpha^2+1)x^2 + o(x^2)}{-\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)}$$

Distinguiamo i seguenti casi:

1° CASO: $1-\alpha^2 \neq 0$

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2}(1-\alpha^2)x^2 + o(x^2)}{-\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2}(1-\alpha^2) + o(1)}{-\frac{1}{2} + o(1)} = \alpha^2 - 1$$

2° CASO: $1-\alpha^2 = 0$

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2}\overbrace{(1-\alpha^2)}^{=0}x^2 + \alpha x^3 + o(x^3)}{-\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{x^2} \frac{\alpha + o(1)}{-\frac{1}{2} + o(1)} = 0 \cdot \frac{\alpha}{-1/2} = 0.$$

$\square$

Esercizio 3 $\alpha \in \mathbb{R}$ integrale ; (2) calcolare per $\alpha = 1/4$

(1) convergenza

$$\int_0^1 \frac{x e^{x/3}}{(e^{x/3}-1)^{2\alpha}} \, dx$$

Soluzione.

(1) Convergenza . Integrale improprio in $x = 0$

$$e^{x/3} = 1 + \frac{x}{3} + o(x) \quad \text{per} \quad x \to 0$$

Dunque $f(x) = \dfrac{x e^{x/3}}{(e^{x/3}-1)^{2\alpha}}$ verifica

$$f(x) = \frac{x}{x^{2\alpha}} \frac{e^{x/3}}{\left(\frac{1}{3}+o(1)\right)^{2\alpha}} = \frac{1}{x^{2\alpha-1}} \left(3 + o(1)\right)^{2\alpha}$$

Per il criterio del confronto Asintotico l'integrale converge se e solo se converge

$$\int_0^1 \frac{1}{x^{2\alpha-1}} \, dx < \infty \iff 2\alpha - 1 < 1$$

$$\iff \boxed{\alpha < 1}\,.$$

(2) Per $\alpha = 1/4$

$$I = \int_0^1 \frac{x \, e^{x/3}}{\sqrt{e^{x/3}-1}} \, dx = \int_0^{t_1} \frac{3 \log(1+t^2) \cdot (1+t^2)}{t} \frac{6t}{1+t^2} \, dt$$

Sostituzione

$$t = \sqrt{e^{x/3}-1} \qquad x = 0 \to t = 0$$

$$t^2 = e^{x/3} - 1 \qquad x = 1 \to t = \sqrt{e^{1/3}-1} = t_1$$

$$t^2 + 1 = e^{x/3}$$

$$x = 3 \log(1+t^2) \qquad dx = 3 \frac{2t}{1+t^2} \, dt$$

Quindi:

$$I = 18 \int_0^{t_1} \log(1+t^2)\, dt =$$

$$= 18 \left[\left[t \log(1+t^2) \right]_{t=0}^{t=t_1} - \int_0^{t_1} t \frac{2t}{1+t^2} dt \right]$$

$$= 18 \left[t_1 \log(1+t_1^2) - 2 \int_0^{t_1} \frac{t^2}{1+t^2} dt \right]$$

$$= \dots$$

A parte:

$$\int_0^{t_1} \frac{t^2}{1+t^2} dt = \int_0^{t_1} \left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right) dt = t_1 - \operatorname{arctg}(t_1)$$

Dunque

$$I = 18 \left[t_1 \log(1+t_1^2) - 2t_1 + 2 \operatorname{arctg}(t_1) \right]$$

ESERCIZIO 4 Disequazione in $\mathbb{C}$

$$\mathrm{Im}\left(i\,(\bar{z}+i-1)^2\right) \geq \mathrm{Re}\left((z-2-i)^2\right)$$

Soluzione. $z = x+iy$ con $x,y \in \mathbb{R}$:

$$i(\bar{z}+i-1)^2 = i(x-iy+i-1)^2 = i\,\big((x-1)+i(1-y)\big)^2$$

$$= i\left((x-1)^2-(1-y)^2+2i(x-1)(1-y)\right)$$

$$= i\left((x-1)^2-(1-y)^2\right)-2(x-1)(1-y)$$

Dunque

$$\mathrm{Im}\left(i\,(\bar{z}+i-1)^2\right) = (x-1)^2-(1-y)^2$$

$$(z-2-i)^2 = (x+iy-2-i)^2 = \big(x-2+i(y-1)\big)^2 =$$

$$= (x-2)^2-(y-1)^2+2i(x-2)(y-1)$$

$$\mathrm{Re}\left((z-2-i)^2\right) = (x-2)^2-(y-1)^2$$

La diseq. iniziale diventa:

$$(x-1)^2-(1-y)^2 \geq (x-2)^2-(y-1)^2$$

$$\Updownarrow$$

$$x^2-2x+1 \geq x^2-4x+4$$

$$\Updownarrow$$

$$2x \geq 3$$