

**ANALISI MATEMATICA 1**  
Area dell'Ingegneria dell'Informazione, Canali 2, 3, 4  
**Appello del 16.07.2015**

**TEMA 1**

**NB:** con  $\log$  si indica il logaritmo in base  $e$ .

**Esercizio 1** Si consideri la funzione

$$f(x) = (x - 1) \log |x - 1| + x \log x.$$

- (a) Determinare il dominio  $D$  di  $f$ ; determinare i limiti di  $f$  agli estremi di  $D$ , gli eventuali asintoti e gli eventuali punti in cui è possibile prolungarla per continuità;
- (b) studiare la derivabilità di  $f$ , studiarne la monotonia e determinarne gli eventuali punti di estremo;
- (c) studiare graficamente il segno di  $f$  e calcolare i limiti significativi di  $f'$ ;
- (d) disegnare un grafico qualitativo di  $f$ .

*Svolgimento.* (a)  $D = \{x \in \mathbb{R} : x > 0, x \neq 1\}$ . Si ha immediatamente

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$
$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x),$$

per cui  $f$  può essere estesa con continuità a tutto  $[0, +\infty[$ . Si ha inoltre  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)/x = +\infty$ , per cui non c'è l'asintoto obliquo.

(b) e (c)  $f$  è evidentemente derivabile in  $D$  e

$$f'(x) = \log |x - 1| + \log x + 2.$$

Si ha inoltre

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = -\infty = \lim_{x \rightarrow 1} f'(x),$$

per cui la prolungata di  $f$  non è derivabile in 0 e 1 (in 1 ha un flesso a tangente verticale).

Per quanto riguarda il segno di  $f'$ , si ha che  $f'(x) \geq 0$  se e solo se  $x|x - 1| \geq e^{-2}$ ,  $x \in D$ . Per  $x > 1$ , l'unica soluzione della disequazione  $x^2 - x - e^{-2}$  è  $(e + \sqrt{4 + e^2})/(2e)$ , che è un punto di minimo locale stretto. Per  $0 < x < 1$ , le soluzioni della disequazione  $-x^2 + x - e^{-2} \geq 0$  sono  $(e \pm \sqrt{-4 + e^2})/(2e)$ , che sono un punto di minimo e di massimo locale stretti.

Per quanto riguarda lo studio del segno di  $f$ , si osservi che  $f(1/2) = 0 = f(1)$ , e quindi  $f(x) < 0$  per ogni  $x \in ]0, 1/2[$ , mentre  $f(x) > 0$  per ogni  $x \in ]1/2, 1[$ . Siccome  $f((1 + \sqrt{1 + e^{-2}})/2) < 0$  e  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ , esiste almeno un punto  $\bar{x} > (1 + \sqrt{1 + e^{-2}})/2$  tale che  $f(\bar{x}) = 0$ . Per la monotonia di  $f$ , tale punto è unico.

(d) Il grafico di  $f$  è in figura 1.

**Esercizio 2** Studiare la convergenza assoluta e la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n (x - 1)^n}{3^n + n^2 |x - 1|^4}$$

al variare di  $x \in \mathbb{R}$ .

*Svolgimento.* Osserviamo che per ogni  $x \in \mathbb{R}$  si ha

$$\frac{2^n |x - 1|^n}{3^n + n^2 |x - 1|^4} \sim \frac{2^n |x - 1|^n}{3^n} \quad \text{per } n \rightarrow \infty,$$

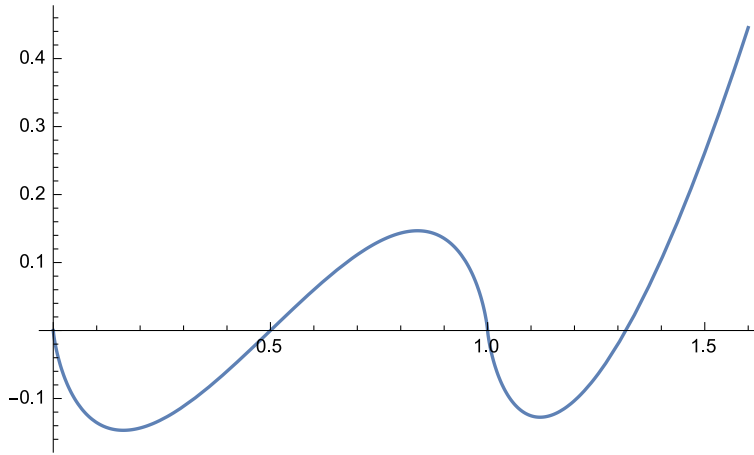


Figura 1: Il grafico di  $f$  (Tema 1).

dato che  $n^2|x-1|^4 = o(3^n)$  per  $n \rightarrow \infty$ . Quindi la serie (dei valori assoluti) ha lo stesso carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n |x-1|^n}{3^n},$$

che per il criterio della radice converge se e solo se  $|x-1| < 3/2$ . Alternativamente si poteva studiare la convergenza assoluta applicando il criterio asintotico del rapporto alla serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n |x-1|^n}{3^n + n^2 |x-1|^4}.$$

Si ha

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1} |x-1|^{n+1}}{3^{n+1} + (n+1)^2 |x-1|^4} \frac{3^n + n^2 |x-1|^4}{2^n |x-1|^n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} 2|x-1| \frac{3^n(1 + |x-1|^4 n^2 / 3^n)}{3^{n+1} |x-1|^4 (n+1)^2 / 3^{n+1}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} 2|x-1|/3, \end{aligned}$$

per cui la serie converge assolutamente, e quindi converge, se  $|x-1| < 3/2$ , cioè se e solo se  $-1/2 < x < 5/2$ , mentre diverge assolutamente e non converge perché il termine generale non è infinitesimo, per  $x < -1/2$  e per  $x > 5/2$ .

Per  $x = -1/2$  il termine generale, in modulo, diventa

$$\frac{2^n | -3/2 |^n}{3^n + n^2 |3/2|^4} = |(-1)^n| \frac{3^n}{3^n + n^2 \frac{3^4}{2^4}} = \frac{1}{1 + \frac{n^2 3^4}{3^n 2^4}} = \frac{1}{1 + o(1)} \rightarrow 1$$

per  $n \rightarrow \infty$ . La serie quindi diverge assolutamente anche per  $x = -1/2$  e non converge perché il termine generale non è infinitesimo. Per  $x = 5/2$  il ragionamento è del tutto simile, per cui la serie converge assolutamente e quindi converge se e solo se  $x \in ] -1/2, 5/2[$ , mentre in tutti gli altri punti non converge né assolutamente né semplicemente.

**Esercizio 3** (a) Provare che  $\sinh \log(1 + \sqrt{2}) = 1$ .

(b) Calcolare l'integrale

$$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 4} + 2}.$$

*Svolgimento.* (a)  $e^{\log(1+\sqrt{2})} - e^{-\log(1+\sqrt{2})} = 1 + \sqrt{2} - \frac{1}{1+\sqrt{2}} = 2$ .

(b) Si ha

$$\begin{aligned}
 \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2+4}+2} &= (\text{ponendo } x/2 = t) \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}+1} \\
 &= (\text{ponendo } t = \sinh u) \int_0^{\log(1+\sqrt{2})} \frac{\cosh u}{\cosh u + 1} du \\
 &= \int_0^{\log(1+\sqrt{2})} du - \int_0^{\log(1+\sqrt{2})} \frac{1}{\cosh u + 1} du \\
 &= \log(1 + \sqrt{2}) - 2 \int_0^{\log(1+\sqrt{2})} \frac{1}{e^u + e^{-u} + 2} du \\
 &= (\text{ponendo } e^u = s) \int_1^{1+\sqrt{2}} \frac{1}{s^2 + 2s + 1} ds \\
 &= \log(1 + \sqrt{2}) + 2 \frac{1}{s+1} \Big|_1^{1+\sqrt{2}} \\
 &= \log(1 + \sqrt{2}) + \frac{2}{2 + \sqrt{2}} - 1 \\
 &= \log(1 + \sqrt{2}) + 1 - \sqrt{2}.
 \end{aligned}$$

**Esercizio 4** Si risolve l'equazione

$$\left(\frac{1}{18} - \frac{i\sqrt{3}}{18}\right) \bar{z}^2 = 1,$$

disegnandone le soluzioni nel piano di Gauss.

*Svolgimento.* Poniamo  $z = \rho e^{i\vartheta}$ . L'equazione diventa

$$\frac{1}{9} \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \rho^2 e^{-2i\vartheta} = 1,$$

cioè

$$\rho^2 e^{-i(\pi/3+2\vartheta)} = 9,$$

da cui  $\rho = 3$  e  $\vartheta = -\pi/6, 5\pi/6$ . Quindi le soluzioni sono

$$z = \pm 3 \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} \right).$$