Esercizio 1   Funzione

$$f(x) = (x+1)\log(x+1) + x\log|x|$$

- Dominio. $x+1>0$ e $x\neq 0$. Dunque

$$D(f) = (-1,0)\cup(0,\infty)$$

- Segno. $f(x)\geq 0 \iff (x+1)\log(x+1) + x\log|x| \geq 0$

$$\iff \log(x+1)^{x+1} + \log|x|^{x} \geq 0$$

$$\iff \log (x+1)^{x+1}\cdot|x|^{x} \geq 0$$

$$\iff (x+1)^{x+1}\,|x|^{x} \geq 1 \qquad \text{complicato}$$

- Limiti

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} (x+1)\log(x+1) + x\log|x|$$

$$= 0+0 = 0$$

Limite noto: $\lim_{t\to 0^+} t\log t = 0$.

$$\lim_{x\to 0} (x+1)\log(x+1) + x\log|x| = 0+0 = 0 \quad \text{come sopra}$$

$$\lim_{x\to +\infty} (x+1)\log(x+1) + x\log|x| = +\infty$$

- Asintoti. Possibile asinto obliquo a $+\infty$:

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x+1}{x} \log(x+1) + \log x = +\infty$$

No asintoto.

- Continuità e prolungamenti.

f è continua su $D(f) = (-1,0) \cup (0,\infty)$ essendo somma di prodotti di funzioni continue.

Ponendo $f(0) := 0$ si ha $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$ e quindi f si prolunga in modo continuo su tutto $(-1,\infty)$.

Ponendo $f(-1) := 0$ c'è prolungamento in $x=-1$.

- Derivabilità. f è derivabile su $(-1,0) \cup (0,\infty)$.

Studiamo in seguito la derivabilità in $x=0$ dopo il prolungamento. E poi anche in $x=-1$

- Derivata per $x>-1$ e $x \neq 0$:

$$f'(x) = \log(x+1) + (x+1)\cdot\frac{1}{x+1} + \log|x| + x\cdot\frac{1}{x}$$

$$= 2 + \log(x+1) + \log|x|$$

Osserviamo che

$\lim_{x\to 0} f'(x) = -\infty \Rightarrow f$ NON è derivabile in $x=0$. C'è tangente verticale.

$\lim_{x\to -1^+} f'(x) = -\infty \Rightarrow f$ NON è deriv. in $x=-1$

- Segno di $f'(x)$:

$$f'(x) \geq 0 \iff 2 + \log\left(|x|(x+1)\right) \geq 0$$

$$\iff \log\left(|x|(x+1)\right) \geq -2$$

$$\iff |x|(x+1) \geq e^{-2}$$

Separiamo i casi : (1) $-1 < x < 0$
(2) $x > 0$

(1) $x \in (-1,0)$. In questo caso:

$$f'(x) \geq 0 \iff -x^2 - x \geq e^{-2}$$

$$\iff x^2 + x + e^{-2} \leq 0$$

Radici

$$x_\pm = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4e^{-2}}}{2}$$

~~Tuttavia~~ dove $\Delta = 1 - 4e^{-2} > 0$. Osserviamo che

$$-1 < x_+ < 0$$

$$-1 < x_- < x_+ < 0$$

Dunque $f'(x) \geq 0 \iff -1 < x_- \leq x \leq x_+ < 0$

	-1		x_-		x_+		0
$f'(x)$		$- - -$		$+++$		$- - -$	
$f(x)$		$\downarrow$		$\uparrow$		$\downarrow$	

(2) $x>0$. In questo caso:

$$f'(x) \geq 0 \iff x^2+x \geq e^{-2}$$
$$\iff x^2+x-e^{-2} \geq 0$$

Radici $\qquad \bar{x}_{\pm} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+4e^{-2}}}{2}$

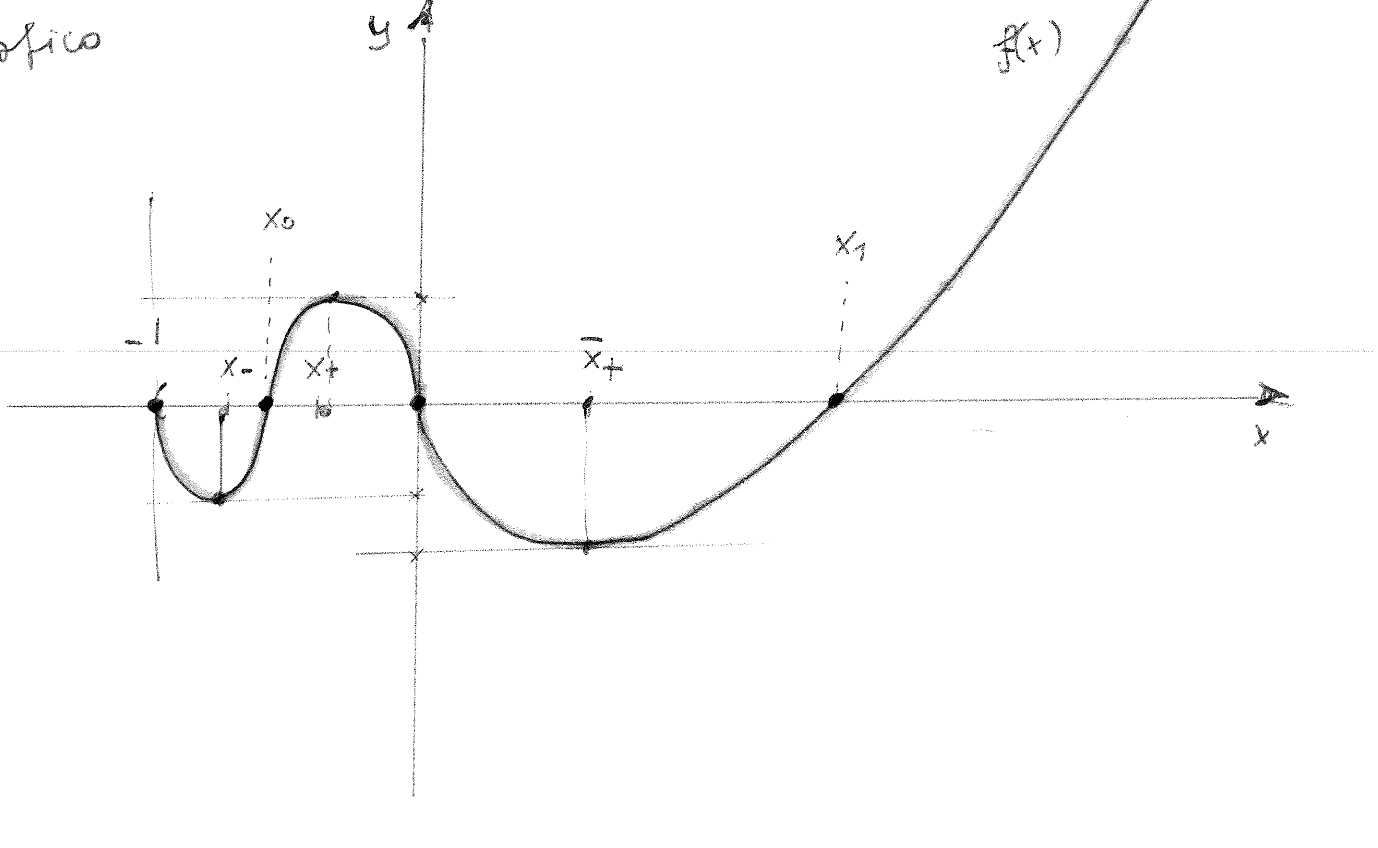
dove $\bar{x}_- < 0$ non è rilevante

$\bar{x}_+ > 0$ è rilevante

Dunque $\quad f'(x) \geq 0 \iff x \geq \bar{x}_+$

	0		$\bar{x}_+$	
$f'(x)$		$- - -$		$+++$
$f(x)$		$\downarrow$		$\uparrow$

• Grafico



- Punti di max / min

x_+ p.to di max locale

x_- p.to di min locale

$\bar{x}_+$ p.to di min locale

} uno dei due è assoluto

- Segno. Dal grafico si deduce che esistono $x_0 \in (-1,0)$
$(x_- < x_0 < x_+)$
e $x_1 > \bar{x}_+$ tali che

$f(x) \geq 0$ per $x \in [x_0, 0] \cup [x_1, \infty)$

Esercizio 2   Convergenza semplice ed assoluta al variare di $x \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n (x-1)^n}{3^n + n^3 |x-1|^4}$$

Convergenza assoluta: Studiamo la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n |x-1|^n}{3^n + n^3 |x-1|^4}$$

Con il Criterio della Radice:

$$L(x) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{4^n |x-1|^n}{3^n + n^3 |x-1|^4}} = 4|x-1| \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{3^n + n^3 |x-1|^4}}$$

Osserviamo che

$$3 \le \sqrt[n]{3^n + \underbrace{n^3 |x-1|^4}_{\substack{\wedge\!| \\ 3^n \\ \text{definitivamente}}}} \le \sqrt[n]{3^n + 3^n} \le 3\sqrt[n]{2} \xrightarrow{n\to\infty} 3$$

Quindi (per confronto) deduciamo che

$$L(x) = \frac{4}{3}|x-1|$$

1° CASO: $L(x) < 1$ $\Rightarrow$ La serie converge ass. e sempl.

2° CASO: $L(x) > 1$ $\Rightarrow$ la serie non converge ass. e nemmeno semplicemente.

Studiamo

$$\frac{4}{3}|x-1|<1 \iff |x-1|<\frac{3}{4} \iff x^2-2x+1<\frac{9}{16}$$

$$\iff x^2-2x+\frac{7}{16}<0$$

Radici $x_\pm = \frac{1}{2}\left(2 \pm \sqrt{4-4\cdot\frac{7}{16}}\right)$

$$= 1 \pm \sqrt{1-7/16} = 1 \pm \sqrt{9/16} = 1 \pm \frac{3}{4} \begin{cases} 7/4 \\ 1/4 \end{cases}$$

Dunque $L(x)<1 \iff 1/4 < x < 7/4$.

Studiamo il caso $L(x)=1 \iff x=1/4$ oppure $x=7/4$

- $x=7/4$. La serie è:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n\left(\frac{3}{4}\right)^n}{3^n+n^3\left(\frac{3}{4}\right)^4} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{3^n+n^3\left(\frac{3}{4}\right)^4}$$

Ma

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^n}{3^n+n^3\left(\frac{3}{4}\right)^4}=1$$

e quindi la serie NON converge

- $x=1/4$. La serie è

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n\left(-\frac{3}{4}\right)^n}{3^n+n^3\left(\frac{3}{4}\right)^4}$$

Argomento analogo $\rightarrow$ La serie NON converge.

Conclusione:

$\frac{1}{4}<x<\frac{7}{4} \Rightarrow$ Serie converge sempl. e assol.

$x\leq 1/4$ opp. $x\geq 7/4 \Rightarrow$ Serie NON converge né sempl. né assol.

Esercizio 3

(a) Provare che $\sinh \lg(1+\sqrt{2}) = 1$

(b) Calcolare $$I = \int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{x^2+9}+3}$$

Soluzione.

(a)
$$\sinh(\log(1+\sqrt{2})) = \frac{e^{\log(1+\sqrt{2})} - e^{-\log(1+\sqrt{2})}}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{2} - \frac{1}{1+\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2}\,\frac{1+2\sqrt{2}+2-1}{1+\sqrt{2}} = 1.$$

(b) Sostituzione $x = 3\sinh(t)$ $\quad dx = 3\cosh(t)\,dt$

$x = 0 \Rightarrow \sinh(t) = 0 \Rightarrow t = 0$

$x = 3 \Rightarrow \sinh(t) = 1 \Rightarrow t = \lg(1+\sqrt{2})$

Sia $t_0 := \log(1+\sqrt{2})$

$$I = \int_0^{t_0} \frac{3\cosh(t)\,dt}{\sqrt{9\sinh^2 t + 9}+3} = \int_0^{t_0} \frac{\cosh(t)\,dt}{\cosh(t)+1}$$

Abbiamo usato $\sinh^2 t + 1 = \cosh^2 t$.

Integrale indefinito:

$$\int \frac{\cosh(t)}{\cosh(t)+1}\,dt = \int \frac{\frac{1}{2}(e^t+e^{-t})}{\frac{1}{2}(e^t+e^{-t})+1}\,dt = \int \frac{(e^{2t}+1)\,dt}{e^{2t}+1+2e^t}$$

Sostituzione $e^t = s$, $t = \log s$, $dt = \frac{ds}{s}$

$$\int \frac{\cosh(t)}{\cosh(t)+1}\, dt = \int \frac{(s^2+1)}{s^2+2s+1} \frac{ds}{s} =$$

$$= \int \frac{s^2+2s+1 \quad -2s}{s^2+2s+1} \frac{ds}{s}$$

$$= \int \left(1 - \frac{2s}{s^2+2s+1}\right) \frac{ds}{s}$$

$$= \log|s| - 2\int \frac{ds}{(s+1)^2} = \log|s| - 2\left[\frac{(s+1)^{-1}}{-1}\right]$$

$$= \log|s| + \frac{2}{s+1}$$

$$= \log e^t + \frac{2}{e^t+1} = t + \frac{2}{e^t+1}$$

Dunque

$$I = \int_0^{t_0} \frac{\cosh t}{\cosh t + 1}\, dt = \left[t + \frac{2}{e^t+1}\right]_{t=0}^{t=t_0}$$

$$= t_0 + \frac{2}{e^{t_0}+1} - 1 = \log(1+\sqrt{2}) + \frac{2}{2+\sqrt{2}} - 1$$

$$= \log(1+\sqrt{2}) + \frac{-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}.$$

Esercizio 4 Calcolare le soluzioni $z \in \mathbb{C}$ dell'equazione

$$\left(-2+2i\sqrt{3}\right)\bar{z}^2 = 1 .$$

Disegnarle nel piano di Gauss.

Soluzione.

$$\left(-2+2i\sqrt{3}\right)\bar{z}^2 = 1 \iff \left(-2-2i\sqrt{3}\right) z^2 = 1$$

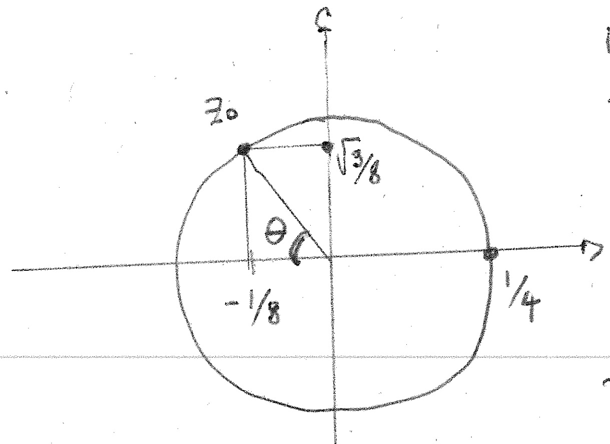
$$\iff z^2 = -\frac{1}{2}\,\frac{1}{1+i\sqrt{3}} = -\frac{1}{2}\,\frac{1}{1+i\sqrt{3}}\,\frac{1-i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}} =$$

$$= -\frac{1}{2}\,\frac{1-i\sqrt{3}}{1+3} = -\frac{1}{8}\left(1-i\sqrt{3}\right) := z_0$$

Dobbiamo calcolare le radici quadrate di z_0.

$$|z_0| = \frac{1}{8}\cdot\sqrt{1+3} = \frac{1}{4}$$

$$\arg(z_0) = \frac{2}{3}\pi \quad \text{Dimostrazione:}$$



L'angolo θ in figura ha tangente:

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\sqrt{3}/8}{|-1/8|} = \sqrt{3}$$

Quindi $\theta = \pi/3$

Deduciamo che $\arg z_0 = \pi - \pi/3 = \frac{2}{3}\pi$

Dunque le due radici di z_0 sono:

$$z_\pm = \pm\sqrt{\frac{1}{4}}\, e^{i\pi/3} = \pm\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$