

ANALISI MATEMATICA 1
Area dell'Ingegneria dell'Informazione, Canali 2, 3, 4

Appello del 18.09.2015

TEMA 1

Esercizio 1 Si consideri la funzione

$$f(x) = x - 1 + \frac{x - 1}{\log|x - 1|}.$$

- (a) Determinare le eventuali simmetrie ed il dominio D di f , i limiti di f agli estremi di D e i punti in cui è possibile prolungarla per continuità;
- (b) determinare gli eventuali asintoti di f ;
- (c) studiare la derivabilità di f , studiarne la monotonia e determinarne gli eventuali punti di estremo relativo;
- (d) studiare graficamente il segno di f ;
- (e) calcolare i limiti significativi di f' ;
- (f) disegnare un grafico qualitativo di f .

Svolgimento. (a) La funzione f non ha simmetrie evidenti. Il suo dominio è costituito dal dominio di $\log|x - 1|$, cioè da $x \neq 1$ e dai punti in cui non si annulla il denominatore $\log|x - 1|$, cioè da $x \neq 0, 2$. Quindi $D = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0, 1, 2\}$. Si ha (attenzione al segno di $(x - 1)/\log|x - 1|$):

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= -\infty, & \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= +\infty, & \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= +\infty, & \lim_{x \rightarrow 1} f(x) &= 0, & \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= -\infty, & \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= +\infty. \end{aligned}$$

La funzione è quindi prolungabile con continuità in $x = 1$, ponendo $f(1) = 0$.

(b) Si ha:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} &= 1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x &= -1 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - 1}{\log|x - 1|} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - x &= -1 + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - 1}{\log|x - 1|} = -\infty, \end{aligned}$$

per cui f non ha asintoti obliqui.

(c) f è derivabile in tutti i punti del suo dominio, per le regole di derivazione. Si ha:

$$f'(x) = 1 + \frac{\log|x - 1| - \frac{(x-1)\text{sign}(x-1)}{|x-1|}}{\log^2|x - 1|} = \frac{\log^2|x - 1| + \log|x - 1| - 1}{\log^2|x - 1|}.$$

Il segno di f' dipende dal segno di $\log^2|x - 1| + \log|x - 1| - 1$, che è positivo se e solo se

$$\log|x - 1| < (-1 - \sqrt{5})/2 \quad \text{oppure} \quad \log|x - 1| > (-1 + \sqrt{5})/2.$$

La soluzione della disequazione $\log|x - 1| \leq (-1 - \sqrt{5})/2$ è

$$1 - e^{\frac{-1 - \sqrt{5}}{2}} \leq x \leq 1 + e^{\frac{-1 - \sqrt{5}}{2}},$$

mentre la soluzione della disequazione $\log|x-1| \geq (-1 + \sqrt{5})/2$ è

$$x \leq 1 - e^{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}} \quad \text{oppure} \quad x \geq 1 + e^{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}.$$

Quindi i punti $x_1 = 1 - e^{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}$ e $x_2 = 1 + e^{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}$ sono di massimo relativo, mentre i punti $x_3 = 1 - e^{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}}$ e $x_4 = 1 + e^{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}}$ sono di minimo relativo.

(d) Per quanto riguarda il segno di f , occorre calcolare i valori di f nei punti x_1 e x_4 . Si ha: $f(x_1) < 0$ e $f(x_4) > 0$, per cui f è positiva in $]0, \xi_1[$, dove ξ_1 è un punto (non calcolabile esplicitamente) compreso tra 0 e x_2 , in $]\xi_2, \xi_3[$, dove $x_2 < \xi_2 < 1 < x_4 < \xi_3$ (ξ_2 e ξ_3 non calcolabili esplicitamente) e per $x > 2$, mentre è negativa altrove.

(e) L'unico limite di f' da calcolare è per $x \rightarrow 1$. Si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = 1,$$

per cui f è derivabile anche in $x = 1$.

(f) Il grafico di f è rappresentato nella Figura 1

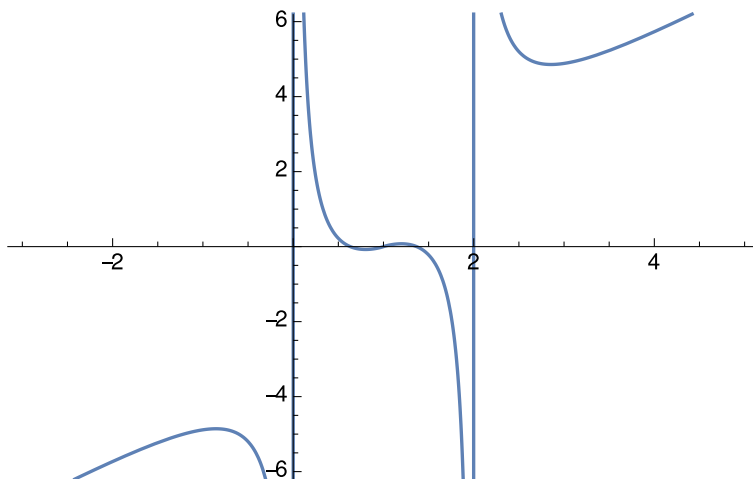


Figura 1: Il grafico di f (Tema 1).

Esercizio 2 Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin \log(1+x^2) - \cosh(\alpha x) + 1 - x^2 e^{-1/x}}{x^5 \log x + x^4}$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Svolgimento. Si ha, per $x \rightarrow 0^+$:

$$\sin \log(1+x^2) = \log(1+x^2) - \frac{1}{6} \log^3(1+x^2) + o(\log^3(1+x^2)) = x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4)$$

$$\cosh(\alpha x) = 1 + \frac{\alpha^2 x^2}{2} + \frac{1}{24} \alpha^4 x^4 + o(x^4)$$

$$x^2 e^{-1/x} = o(x^4),$$

quindi il numeratore è

$$x^2 \left(1 - \frac{\alpha^2}{2}\right) - x^4 \left(\frac{1}{2} + \frac{\alpha^4}{24}\right) + o(x^4).$$

Il denominatore è

$$x^4 + o(x^4)$$

e quindi si ha:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin \log(1+x^2) - \cosh(\alpha x) + 1 - x^2 e^{-1/x}}{x^5 \log x + x^4} = \begin{cases} +\infty & \text{se } |\alpha| < \sqrt{2} \\ -\infty & \text{se } |\alpha| > \sqrt{2} \\ -\frac{2}{3} & \text{se } |\alpha| = \sqrt{2}. \end{cases}$$

Esercizio 3 Si determinino tutti i parametri $\alpha, \beta > 0$ tali che l'integrale

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{(x-2)^\alpha (x+2\sqrt{x-2}+1)^\beta} dx$$

converga e lo si calcoli per $\alpha = 1/2$ e $\beta = 1$.

Svolgimento. L'integranda è continua in $(2, +\infty)$. Inoltre si ha

$$f(x) \sim \frac{1}{3^\beta} \frac{1}{(x-2)^\alpha} \quad \text{per } x \rightarrow 2^+,$$

e quindi l'integrale converge nel primo estremo se e solo se $\alpha < 1$, e

$$f(x) \sim \frac{1}{x^{\alpha+\beta}} \quad \text{per } x \rightarrow +\infty,$$

e quindi l'integrale converge nel secondo estremo se e solo se $\alpha + \beta > 1$. In sintesi, l'integrale converge se e solo se le condizioni $\alpha < 1$ e $\alpha + \beta > 1$ sono entrambe soddisfatte.

Per quanto riguarda il calcolo, si ha

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{x-2}(x+2\sqrt{x-2}+1)} dx &= (\text{sostituendo } x-2=t^2) \int \frac{2t}{t(t^2+2t+3)} dt \\ &= 2 \int \frac{1}{(t+1)^2+2} dt = \int \frac{1}{\left(\frac{t+1}{\sqrt{2}}\right)^2+1} dt \\ &= \sqrt{2} \arctan \frac{t+1}{\sqrt{2}} + c = \sqrt{2} \arctan \frac{\sqrt{x-2}+1}{\sqrt{2}} + c. \end{aligned}$$

Quindi l'integrale richiesto vale

$$\sqrt{2} \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan \frac{\sqrt{x-2}+1}{\sqrt{2}} - \arctan \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \frac{\pi - 2 \arctan \frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}.$$

Esercizio 4 Si risolva la disequazione

$$\operatorname{Re}(z+1) \left(\operatorname{Re}(z^2) - 2\operatorname{Re}(\bar{z}^2) + 2(\operatorname{Im}(iz))^2 \right) \leq \operatorname{Re}\left(z + \frac{2}{1+i}\right)$$

e se ne disegni l'insieme delle soluzioni nel piano di Gauss.

Svolgimento. Posto $z = x + iy$, si ha:

$$\operatorname{Re}(z+1) = x+1$$

$$\operatorname{Re}\left(z + \frac{2}{1+i}\right) = \operatorname{Re}\left(x + iy + \frac{2(1-i)}{2} - 1\right) = x+1$$

$$\operatorname{Re}(z^2) - 2\operatorname{Re}(\bar{z}^2) + 2(\operatorname{Im}(iz))^2 = x^2 - y^2 - 2(x^2 - y^2) + 2x^2 = x^2 + y^2.$$

La disequazione da risolvere può quindi essere riscritta come

$$(x + 1)(x^2 + y^2) \leq x + 1,$$

cioè come

$$(x + 1)(x^2 + y^2 - 1) \leq 0.$$

Le soluzioni sono quindi

$$x \leq -1 \quad \text{e} \quad x^2 + y^2 \geq 1,$$

cioè il semipiano $\{(x, y) : x \leq -1\}$, e

$$x \geq -1 \quad \text{e} \quad x^2 + y^2 \leq 1,$$

cioè il cerchio $\{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$. Le soluzioni sono rappresentate dalle regioni colorate in Figura 2.

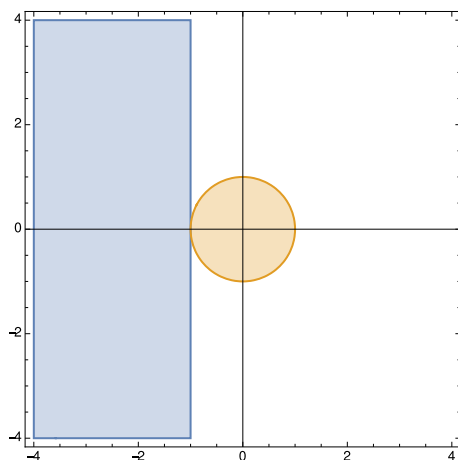


Figura 2: La soluzione dell'esercizio 4 (Tema 1).

TEMA 2

Esercizio 1 Si consideri la funzione

$$f(x) = 2 - x - \frac{x - 2}{\log |x - 2|}.$$

- Determinare le eventuali simmetrie ed il dominio D di f , i limiti di f agli estremi di D e i punti in cui è possibile prolungarla per continuità;
- determinare gli eventuali asintoti di f ;
- studiare la derivabilità di f , studiarne la monotonia e determinarne gli eventuali punti di estremo relativo;
- studiare graficamente il segno di f ;
- calcolare i limiti significativi di f' ;
- disegnare un grafico qualitativo di f .

Svolgimento.

Esercizio 2 Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sinh \log(1 - x^2) - \cos(\alpha x) + 1 - xe^{-1/x}}{x^4 - x^6 \log x}$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Svolgimento.

Esercizio 3 Si determinino tutti i parametri $\alpha, \beta > 0$ tali che l'integrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{(x-1)^\alpha (x+4\sqrt{x-1}+2)^\beta} dx$$

converga e lo si calcoli per $\alpha = 1/2$ e $\beta = 1$.

Svolgimento.

Esercizio 4 Si risolva la disequazione

$$\operatorname{Re}(z-1) \left(\operatorname{Re}(\bar{z}^2) - 2\operatorname{Re}(z^2) + 2(\operatorname{Im}(iz))^2 \right) \geq \operatorname{Re}\left(z - \frac{2}{1-i}\right)$$

e se ne disegni l'insieme delle soluzioni nel piano di Gauss.

Svolgimento.