

ANALISI MATEMATICA 1
Area dell'Ingegneria dell'Informazione

Appello del 18.09.2017

TEMA 1

Esercizio 1 Si consideri la funzione

$$f(x) := \frac{3x}{\log |2x|}.$$

- i) Determinare il dominio D e studiare le eventuali simmetrie ed il segno di f ; determinare i limiti di f agli estremi di D , l'eventuale prolungabilità di f e gli eventuali asintoti;
- ii) studiare la derivabilità, calcolare la derivata ed i suoi limiti significativi, studiare la monotonia e determinare gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto di f ;
- iii) calcolare f'' e studiare la concavità e la convessità di f ;
- iv) disegnare un grafico qualitativo di f .

Svolgimento. i) Il dominio è $D = \{x : x \neq 0, \log |2x| \neq 0\} = \{x : x \neq 0, x \neq \pm \frac{1}{2}\}$. La funzione è visibilmente dispari, per cui la studiamo in $[0, +\infty[$. Per $x > 0$, $f(x) > 0$ se e solo se $x > \frac{1}{2}$. Si ha

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= 0 \quad (\text{per cui } f \text{ è prolungabile con continuità in } x = 0) \\ \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} f(x) &= -\infty \\ \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} f(x) &= +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} &= 0 \quad (\text{per cui non c'è asintoto obliquo per } x \rightarrow +\infty).\end{aligned}$$

- ii) Per $x > 0, x \neq \frac{1}{2}$ si ha

$$f'(x) = \frac{3 \log 2x - 3}{\log^2 2x}.$$

Essendo f prolungabile con continuità in $x = 0$, vediamo se il prolungamento di f è derivabile in 0. A tale scopo calcoliamo

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = 0,$$

per cui la prolungata di f è derivabile anche in $x = 0$, con derivata nulla. Il segno di f' dipende solo dal segno di $\log 2x - 1$, che è positivo se e solo se $x > e/2$. Pertanto $e/2$ è un punto di minimo locale stretto. Non ci sono estremi assoluti.

- iii) Per $x > 0, x \neq \frac{1}{2}$ si ha

$$f''(x) = 3 \frac{\frac{\log^2 2x}{x} - 2(\log 2x - 1) \frac{\log 2x}{x}}{\log^4 2x} = 3 \frac{2 - \log 2x}{x \log^3 2x},$$

che risulta > 0 se e solo se $\frac{1}{2} < x < \frac{e^2}{2}$, cioè f è convessa nell'intervallo $] \frac{1}{2}, \frac{e^2}{2} [$ e concava negli intervalli $] 0, \frac{1}{2} [$ e $] \frac{1}{2}, +\infty [$.

- iv) Il grafico di f è riportato nella figura 1.

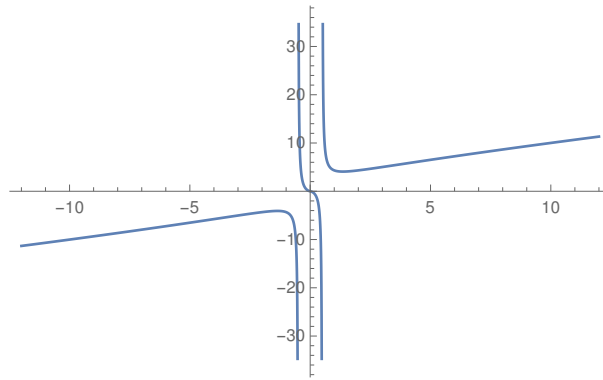


Figure 1: Il grafico di f (Tema 1).

Esercizio 2 Dato il polinomio

$$z^4 + z^3 + 8iz + 8i$$

determinarne prima una radice intera e poi le altre radici, esprimendole in forma algebrica.

Svolgimento. Per tentativi, una radice intera è $z = -1$: infatti

$$(-1)^4 + (-1)^3 - 8i + 8i = 0.$$

Eseguendo la divisione di polinomi, oppure, più semplicemente, raccogliendo z^3 nei primi due addendi e $8i$ negli ultimi due, risulta

$$z^4 + z^3 + 8iz + 8i = (z + 1)(z^3 + 8i),$$

per cui le restanti tre radici sono le radici cubiche di $-8i = 8e^{\frac{3}{2}\pi i}$, cioè sono

$$2e^{i\frac{\pi}{2}} = 2i, \quad 2e^{(\frac{1}{2} + \frac{2}{3})\pi i} = 2e^{\frac{7}{6}\pi i} = -\sqrt{3} - i, \quad 2e^{(\frac{1}{2} + \frac{4}{3})\pi i} = 2e^{\frac{11}{6}\pi i} = \sqrt{3} - i.$$

Esercizio 3 Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{3x}{n}\right)^{n^2}$$

al variare di $x \in \mathbb{R}$.

Svolgimento. La serie è a termini definitivamente positivi per ogni $x \in \mathbb{R}$. Il criterio della radice dà

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\left(1 + \frac{3x}{n}\right)^{n^2}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{3x}{n}\right)^n = e^{3x}.$$

La serie pertanto converge per ogni $x < 0$ e diverge per ogni $x > 0$. Per $x = 0$ il criterio della radice non dà informazioni, ma per tale x la serie ha per termine generale 1 e quindi diverge.

Esercizio 4 Calcolare, al variare del parametro reale α , il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cosh(\alpha x) - e^{x^2} + x \log(\cos x)}{x - \sin x + e^{-1/x^2}}.$$

Svolgimento. Il numeratore, per $x \rightarrow 0$, si sviluppa come

$$\begin{aligned}\cosh \alpha x &= 1 + \frac{1}{2}\alpha^2 x^2 + \frac{1}{24}\alpha^4 x^4 + o(x^4) = 1 + \frac{1}{2}\alpha^2 x^2 + o(x^3) \\ -e^{x^2} &= -1 - x^2 - \frac{1}{2}x^4 + o(x^4) = -1 - x^2 + o(x^3) \\ x \log \cos x &= x \log \left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4) \right) = x \left(\frac{-x^2}{2} + o(x^2) \right) = \frac{-x^3}{2} + o(x^3),\end{aligned}$$

per cui

$$\cosh(\alpha x) - e^{x^2} + x \log(\cos x) = x^2 \left(\frac{\alpha^2}{2} - 1 \right) - \frac{x^3}{2} + o(x^3) = \begin{cases} x^2 \left(\frac{\alpha^2}{2} - 1 \right) + o(x^2) & \text{se } \alpha \neq \pm\sqrt{2} \\ -\frac{x^3}{2} + o(x^3) & \text{se } \alpha = \pm\sqrt{2}. \end{cases}$$

Il denominatore, per $x \rightarrow 0$, si sviluppa come

$$x - \sin x + e^{-1/x^2} = \frac{x^3}{6} + o(x^3),$$

in quanto $e^{-1/x^2} = o(x^\beta)$ per ogni β reale. Il limite quindi vale

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cosh(\alpha x) - e^{x^2} + x \log(\cos x)}{x - \sin x + e^{-1/x^2}} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 \left(\frac{\alpha^2}{2} - 1 \right) - \frac{x^3}{2} + o(x^3)}{\frac{x^3}{6} + o(x^3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \begin{cases} \frac{x^2 \left(\frac{\alpha^2}{2} - 1 \right) + o(x^2)}{\frac{x^3}{6} + o(x^3)} & \text{se } \alpha \neq \pm\sqrt{2} \\ \frac{-\frac{x^3}{2} + o(x^3)}{\frac{x^3}{6} + o(x^3)} & \text{se } \alpha = \pm\sqrt{2}. \end{cases} \\ &= \begin{cases} +\infty & \text{se } |\alpha| < \sqrt{2} \\ -\infty & \text{se } |\alpha| > \sqrt{2} \\ -3 & \text{se } \alpha = \pm\sqrt{2}. \end{cases}\end{aligned}$$

Esercizio 5 Studiare la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_0^{+\infty} x e^{ax} (2 + \cos x) dx$$

al variare di $a \in \mathbb{R}$. Calcolare poi

$$\int_0^{+\infty} x e^{-x} \cos x dx$$

(sugg.: calcolare preliminarmente una primitiva di $e^{-x} \cos x$).

Svolgimento. Una primitiva dell'integranda può essere calcolata per ogni a , per cui la discussione della convergenza può essere fatta sia direttamente dalla definizione, sia mediante criteri di convergenza. Usando il criterio del confronto si ha, per $a \geq 0$,

$$x e^{ax} (2 + \cos x) \geq x \text{ per ogni } x \geq 0$$

e quindi l'integrale diverge. Per $a < 0$ il confronto asintotico dà, ad esempio,

$$x e^{ax} (2 + \cos x) = o(e^{ax/2}),$$

perché

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x e^{ax} (2 + \cos x)}{e^{ax/2}} \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x e^{ax}}{e^{ax/2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 3x e^{\frac{ax}{2}} = 0.$$

Siccome $\int_0^{+\infty} e^{ax/2} dx < +\infty$, l'integrale converge.

Per la primitiva, calcoliamo preliminarmente

$$\begin{aligned} \int e^{-x} \cos x \, dx &= -e^{-x} \cos x - \int e^{-x} \sin x \, dx \\ &= -e^{-x} \cos x + e^{-x} \sin x - \int e^{-x} \cos x \, dx, \end{aligned}$$

per cui

$$\int e^{-x} \cos x \, dx = \frac{e^{-x}}{2} (\sin x - \cos x) + c.$$

Ora integriamo per parti prendendo x come fattore finito e $e^{-x} \cos x$ come fattore differenziale. Risulta

$$\int x e^{-x} \cos x \, dx = x \frac{e^{-x}}{2} (\sin x - \cos x) - \int \frac{e^{-x}}{2} (\sin x - \cos x) \, dx.$$

Calcoliamo separatamente

$$\begin{aligned} \int e^{-x} \sin x \, dx &= -e^{-x} \sin x + \int e^{-x} \cos x \, dx \\ &= -e^{-x} \sin x - e^{-x} \cos x - \int e^{-x} \sin x \, dx, \end{aligned}$$

per cui

$$\int e^{-x} \sin x \, dx = -\frac{e^{-x}}{2} (\sin x + \cos x) + c.$$

In definitiva,

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} x e^{-x} \cos x \, dx &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[-x \frac{e^{-x}}{2} (\sin x - \cos x) \Big|_0^b + \frac{1}{4} e^{-x} (\sin x + \cos x) \Big|_0^b \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4} e^{-x} (\sin x - \cos x) \Big|_0^b \right] \\ &= 0. \end{aligned}$$

(NB. Non è strano che il risultato sia nullo: l'integranda non ha segno costante.)

TEMA 2

Esercizio 1 Si consideri la funzione

$$f(x) := \frac{2x}{\log |3x|}.$$

- i) Determinare il dominio D e studiare le eventuali simmetrie ed il segno di f ; determinare i limiti di f agli estremi di D , l'eventuale prolungabilità di f e gli eventuali asintoti;
- ii) studiare la derivabilità, calcolare la derivata ed i suoi limiti significativi, studiare la monotonia e determinare gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto di f ;
- iii) calcolare f'' e studiare la concavità e la convessità di f ;

iv) disegnare un grafico qualitativo di f .

Svolgimento. i) $D = \{x \in \mathbb{R} : 3x \neq 0, \log|3x| \neq 0\} = \{x \neq 0, |3x| \neq 1\} = \mathbb{R} \setminus \{0, \pm \frac{1}{3}\}$. Notiamo subito che f è dispari, quindi è sufficiente discutere le sue proprietà su $D \cap [0, +\infty[=]0, \frac{1}{3}[\cup]\frac{1}{3}, +\infty[$. In questo caso $f(x) = \frac{2x}{\log(3x)}$. Per $x > 0$ si ha che

$$f(x) \geq 0, \iff \log(3x) > 0, \iff x > \frac{1}{3}.$$

Non ci sono zeri. Limiti: evidentemente $f(0+) = \frac{0+}{\log(0+)} = \frac{0+}{-\infty} = 0-$ per cui f è prolungabile con continuità in $x = 0$; $f(\frac{1}{3}\pm) = \frac{2/3}{\log 1\pm} = \frac{2/3}{0\pm} = \pm\infty$. Per $x = \frac{1}{3}$ si ha quindi un asintoto verticale; $f(+\infty) = +\infty$ essendo $x \gg \log x$ e siccome $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\log(3x)} = 0$ non ci sono asintoti a $+\infty$.

ii) f è continua e derivabile dove definita essendo composizione di funzioni continue e derivabili su D . Sempre limitandoci ad $x > 0$,

$$f'(x) = 2 \left(\frac{x}{\log(3x)} \right)' = 2 \frac{\log(3x) - x \frac{3}{3x}}{(\log(3x))^2} = 2 \frac{\log(3x) - 1}{(\log(3x))^2}.$$

L'unico limite significativo è per $x \rightarrow 0+$: in tal caso $\log(3x) \rightarrow -\infty$ e siccome $(\log(3x))^2 \gg \log(3x)$ per $x \rightarrow 0+$ si ha che $f'(0+) = 0$. Per simmetria, $f'(0-) = 0$, il che dice che f è prolungabile con derivabilità in $x = 0$. Monotonia: abbiamo che

$$f'(x) \geq 0, \iff \log(3x) - 1 \geq 0, \iff x \geq \frac{e}{3}.$$

Dunque, su $D \cap [0, +\infty[$ f è decrescente su $]0, 1/3[\cup]1/3, e/3]$, crescente su $[e/3, +\infty[$: il punto $x = e/3$ è minimo su $D \cap [0, +\infty[$. Per simmetria, $x = -e/3$ è massimo su $D \cap]-\infty, 0]$. Visti i limiti all'infinito o gli asintoti verticali possiamo escludere l'esistenza di estremanti assoluti.

iii) Su D la funzione f' è derivabile e, per $x > 0$,

$$f''(x) = 2 \left(\frac{\log(3x) - 1}{(\log(3x))^2} \right)' = 2 \frac{\frac{1}{x}(\log(3x))^2 - (\log(3x) - 1)2\log(3x)\frac{1}{x}}{(\log(3x))^4} = \frac{2}{x} \cdot \frac{2 - \log(3x)}{(\log(3x))^3}$$

Da qui si ha che $f''(x) \geq 0$: per $x > \frac{1}{3}$ sse $x < \frac{e^2}{3}$; per $0 < x < \frac{1}{3}$ sse $x > \frac{e^2}{3}$ (cioè mai). Se ne conclude che f è convessa su $] \frac{1}{3}, \frac{e^2}{3} [$ concava altrove (per $x > 0$).

iv) Grafico di f :

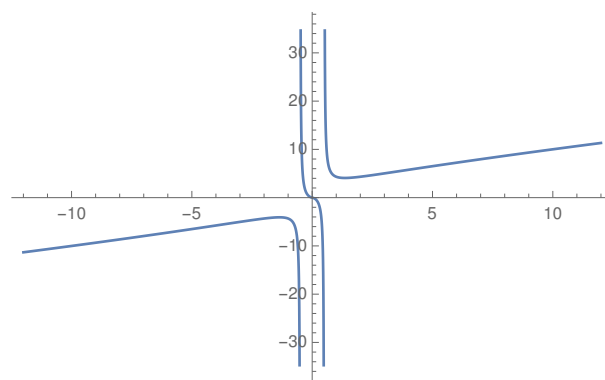


Figure 2: Il grafico di f (Tema 2).

Esercizio 2 Dato il polinomio

$$z^4 - z^3 - 27iz + 27i$$

determinarne prima una radice intera e poi le altre radici, esprimendole in forma algebrica.

Svolgimento. Cercando tra i divisori del termine noto si vede immediatamente che $z = 1$ è soluzione. Dividendo allora per $z - 1$ si ottiene la fattorizzazione

$$z^4 - z^3 - 27iz + 27i = (z - 1)(z^3 - 27i)$$

da cui le altre radici sono quelle per cui $z^3 - 27i = 0$, cioè $z^3 = 27i = 3^3 u\left(\frac{\pi}{2}\right)$ (ricordiamo $u(\theta) = \cos \theta + i \sin \theta$). Dunque, per la formula di Demoivre, $z_k = 3u\left(\frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3}\right)$, $k = 0, 1, 2$. Passando alla forma algebrica

$$z_0 = 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right), \quad z_1 = 3\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right), \quad z_2 = -3i.$$

Esercizio 3 Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{2x}{n}\right)^{n^2}$$

al variare di $x \in \mathbb{R}$.

Svolgimento. Fissato $x \in \mathbb{R}$, siccome $1 - \frac{2x}{n} \rightarrow 1$ per $n \rightarrow +\infty$, possiamo considerare la serie come a termini di segno definitivamente costante (positivo). Appliciamo il test della radice:

$$\lim_n \left(\left(1 - \frac{2x}{n}\right)^{n^2} \right)^{1/n} = \lim_n \left(1 - \frac{2x}{n}\right)^n = e^{-2x},$$

in virtù del limite notevole. Si conclude che:

- la serie converge per $e^{-2x} < 1$, cioè per $x > 0$;
- la serie diverge per $e^{-2x} > 1$, cioè per $x < 0$.

Per $x = 0$ il test fallisce, tuttavia in questo caso la serie diventa $\sum_n 1^{n^2} = \sum_n 1$ evidentemente divergente.

Esercizio 4 Calcolare, al variare del parametro reale α , il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos x - e^{\alpha x^2} + x \log(\cosh x)}{x - \sinh x + e^{-1/x^2}}.$$

Svolgimento. Facilmente si vede che si tratta di una forma indeterminata del tipo $\frac{0}{0}$. Per individuare l'ordine di infinitesimo, usiamo gli sviluppi asintotici. Per il numeratore

$$\begin{aligned} N(x) &= 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3) - (1 + \alpha x^2 + o(x^3)) + x \log\left(1 + \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right) \\ &= -\left(\alpha + \frac{1}{2}\right)x^2 + o(x^3) + x\left(\frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) \\ &= -\left(\alpha + \frac{1}{2}\right)x^2 + \frac{x^3}{2} + o(x^3) \end{aligned}$$

Al denominatore, osservato che

$$x - \sinh x = x - \left(x + \frac{x^3}{6} + o(x^3) \right) = -\frac{x^3}{6} + o(x^3),$$

e che $e^{-1/x^2} = o(x^3)$ (facile) si conclude $D(x) = -\frac{x^3}{6} \cdot 1_x$. Conclusione:

$$\frac{N(x)}{D(x)} = \begin{cases} \frac{-(\alpha + \frac{1}{2})x^2 + o(x^2)}{\frac{x^3}{2} + o(x^3)} \longrightarrow -\operatorname{sgn}(\alpha + \frac{1}{2})\infty, & \alpha \neq -\frac{1}{2}, \\ \frac{\frac{x^3}{2} + o(x^3)}{-\frac{x^3}{6} + o(x^3)} \longrightarrow -3, & \alpha = -1/2. \end{cases}$$

Esercizio 5 Studiare la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_0^{+\infty} x e^{ax} (2 - \sin x) dx$$

al variare di $a \in \mathbb{R}$. Calcolare poi

$$\int_0^{+\infty} x e^{-x} \sin x dx$$

(sugg.: calcolare preliminarmente una primitiva di $e^{-x} \sin x$).

Svolgimento. Dobbiamo controllare l'integrabilità a $+\infty$. Siccome $1 \leq 2 - \sin x \leq 3$, l'integrabilità equivale a quella di $x e^{ax}$, che converge se e solo se $a < 0$.

Per il calcolo dell'integrale, si può procedere come nello svolgimento del Tema 1. In alternativa, procedendo per parti, si ha

$$\int x e^{-x} \sin x dx = - \int (e^{-x})' x \sin x dx = - \left[e^{-x} x \sin x - \int e^{-x} (\sin x + x \cos x) dx \right]$$

Ora, osserviamo che

$$\int x e^{-x} \cos x dx = - \left[e^{-x} x \cos x - \int e^{-x} (\cos x - x \sin x) dx \right]$$

da cui, immettendo nella prima e riportando a primo membro la primitiva comune, dopo semplici passaggi algebrici si trova

$$2 \int x e^{-x} \sin x dx = - \left[e^{-x} x \sin x + e^{-x} x \cos x + \int e^{-x} \sin x dx + \int e^{-x} \cos x dx \right]$$

Dallo svolgimento del Tema 1 si ricava che

$$\int e^{-x} (\cos x + \sin x) dx = -e^{-x} \cos x + c.$$

In conclusione

$$\int x e^{-x} \sin x dx = -\frac{e^{-x}}{2} [x(\sin x + \cos x) - \cos x].$$

Per valutare l'integrale generalizzato: a $+\infty$ la primitiva è facilmente nulla; in $x = 0$ vale $-\frac{1}{2}$. In sintesi, l'integrale generalizzato vale $\frac{1}{2}$.