

Ingegneria Meccanica, Canale 2
Prova scritta di Analisi Matematica 1

Padova, 19.2.2020

TEMA 1

1) [9 punti] Data la funzione

$$f(x) = \log |\log(x - 2)|,$$

- a) determinare il dominio D e studiare il segno di f ;
- b) determinare i limiti di f agli estremi di D ;
- c) studiare la derivabilità, calcolare la derivata e studiare la monotonia di f ; determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto;
- d) calcolare la derivata seconda e studiare la concavità e la convessità di f ;
- e) disegnare un grafico qualitativo di f .

2) [6 punti] Calcolare, al variare del parametro reale α , il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos x - e^{\frac{x^2}{2}} + e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^\alpha \operatorname{arctg} x^3}$$

3) [8 punti] Studiare la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x}}{3 + e^{2x}} dx$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ e calcolarlo per $\alpha = 0$.

4) [9 punti] Data l'equazione differenziale

$$y'' - 4y' + 4y = 1 - e^t,$$

- a) determinarne l'integrale generale;
- b) dire se ammette soluzioni limitate definitivamente per $t \rightarrow -\infty$ ed in caso affermativo calcolarle;
- c) determinare la soluzione y che soddisfa le condizioni $y(0) = -\frac{3}{4}$, $y'(0) = 1$.

5) (**Facoltativo**) Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} \frac{e^{-x}}{x} dx.$$

NB: con \log si indica il logaritmo in base e .

Tempo a disposizione: 2 ore e 15 minuti.

Il candidato deve consegnare questo foglio assieme al foglio intestato. La brutta copia non va consegnata: viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. È vietato tenere con sé, anche spenti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo e usare libri e appunti. Ogni affermazione deve essere adeguatamente giustificata. La parte facoltativa ha rilevanza solo per il voto finale, non per l'ammissione all'orale.

Ingegneria Meccanica, Canale 2
Prova scritta di Analisi Matematica 1

Padova, 19.2.2020

TEMA 2

1) [9 punti] Data la funzione

$$f(x) = \log |\log(3 - x)|,$$

- a) determinare il dominio D e studiare il segno di f ;
- b) determinare i limiti di f agli estremi di D ;
- c) studiare la derivabilità, calcolare la derivata e studiare la monotonia di f ; determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto;
- d) calcolare la derivata seconda e studiare la concavità e la convessità di f ;
- e) disegnare un grafico qualitativo di f .

2) [6 punti] Calcolare, al variare del parametro reale α , il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{sen} x - \operatorname{senh} x + e^{-\frac{1}{2x^2}}}{x^\alpha \log(1 + x^2)}$$

3) [8 punti] Studiare la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{2\alpha x}}{4 + e^{2x}} dx$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ e calcolarlo per $\alpha = 0$.

4) [9 punti] Data l'equazione differenziale

$$y'' + 6y' + 9y = 1 + e^{-t},$$

- a) determinarne l'integrale generale;
- b) dire se ammette soluzioni limitate definitivamente per $t \rightarrow +\infty$ ed in caso affermativo calcolarle;
- c) determinare la soluzione y che soddisfa le condizioni $y(0) = \frac{13}{36}$, $y'(0) = \frac{1}{4}$.

5) **(Facoltativo)** Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} \frac{e^{-x}}{x} dx.$$

NB: con \log si indica il logaritmo in base e .

Tempo a disposizione: 2 ore e 15 minuti.

Il candidato deve consegnare questo foglio assieme al foglio intestato. La brutta copia non va consegnata: viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. È vietato tenere con sé, anche spenti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo e usare libri e appunti. Ogni affermazione deve essere adeguatamente giustificata. La parte facoltativa ha rilevanza solo per il voto finale, non per l'ammissione all'orale.