

Ingegneria Meccanica, Canale 2
Prova scritta di Analisi Matematica 1

Padova, 21.1.2020

TEMA 1

1) Data la funzione

$$f(x) = e^{\frac{1}{2-x}} \frac{1}{x-2},$$

- a) determinare il dominio D e studiare il segno di f ;
- b) determinare i limiti di f agli estremi di D e studiare la prolungabilità di f ;
- c) calcolare la derivata e studiare la monotonia di f ; determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto; (FACOLTATIVO) calcolare i limiti significativi di f' ;
- d) disegnare un grafico qualitativo di f .

Svolgimento. a) $D = \{x \neq 2\}$. Il segno di f è il segno di $x - 2$.

b) Si ha

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

e

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 0$$

(quest'ultimo risulta dal limite fondamentale $\lim_{y \rightarrow +\infty} ye^{-y} = 0$ con il cambio di variabile $y = \frac{1}{x-2}$). Perciò f risulta prolungabile in $x = 2$, ponendo $f(2) = 0$, e la prolungata è continua per $x \rightarrow 2^+$ (ma non per $x \rightarrow 2^-$).

c) Si ha, per $x \neq 2$,

$$f'(x) = \frac{\frac{x-2}{(x-2)^2} e^{\frac{1}{2-x}} - e^{\frac{1}{2-x}}}{(x-2)^2} = \frac{3-x}{(x-2)^3} e^{\frac{1}{2-x}},$$

che risulta > 0 se e solo se $2 < x < 3$. Quindi f è strettamente decrescente in $] -\infty, 2[$ e in $]3, +\infty[$ e $x = 3$ è il punto di massimo assoluto, con $f(3) = \frac{1}{e}$. L'unico limite significativo di $f'(x)$ è

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f'(x) = 0,$$

che risulta dal limite fondamentale $\lim_{y \rightarrow +\infty} y^\alpha e^{-y} = 0$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.

d) Il grafico di f è in figura 1.

2) Calcolare il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cosh(x + x^2) - e^{\frac{x^2}{2}}}{(\operatorname{tg} x)^\alpha}$$

al variare del parametro $\alpha > 0$.

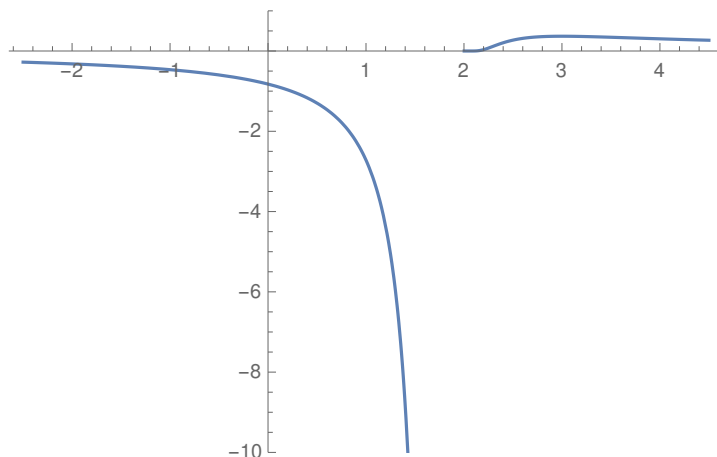


Figura 1: Il grafico di f (Tema 1).

Svolgimento. Il denominatore è asintotico a x^α per $x \rightarrow 0^+$. Per il numeratore, ricordiamo che, per $y \rightarrow 0$, $e^y = 1 + y + \frac{y}{2} + o(y^2)$ e $\cosh y = 1 + \frac{y^2}{2} + \frac{1}{24}y^4 + o(y^4)$, per cui si ha, per $x \rightarrow 0$

$$e^{\frac{x^2}{2}} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{2} \right)^2 + o(x^4)$$

$$\cosh(x + x^2) = 1 + \frac{1}{2}(x + x^2)^2 + \frac{1}{24}(x + x^2)^4 + o(x + x^2)^4 = 1 + \frac{1}{2}(x^2 + 2x^3) + o(x^3),$$

da cui

$$\cosh(x + x^2) - e^{-\frac{x^2}{2}} = 1 + \frac{x^2}{2} + x^3 + o(x^3) - \left(1 + \frac{x^2}{2} + o(x^3) \right) = x^3 + o(x^3).$$

Risulta perciò

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cosh(x + x^2) - e^{-\frac{x^2}{2}}}{(\operatorname{tg} x)^\alpha} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^3 + o(x^3)}{x^\alpha} = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha < 3 \\ 1 & \text{se } \alpha = 3 \\ +\infty & \text{se } \alpha > 3. \end{cases}$$

3) Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} n \log(n+1)}{n^2}.$$

Svolgimento. Si ha

$$\left| \frac{\operatorname{sen} n \log(n+1)}{n^2} \right| \leq \frac{\log(n+1)}{n^2} = o\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$$

per $n \rightarrow \infty$ (perché $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{\frac{3}{2}} \log(n+1)}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(n+1)}{\sqrt{n}} = 0$). Siccome la serie con termine generale $n^{-\frac{3}{2}}$ converge, la serie data converge assolutamente e quindi converge.

4) Data l'equazione differenziale

$$y' = (1 - y)^2 \frac{t + 1}{t^2 + 4},$$

a) determinarne le soluzioni costanti;

b) calcolare la soluzione y che soddisfa la condizione $y(0) = 0$.

Svolgimento. a) Le soluzioni costanti sono quelle per cui il secondo membro è nullo per ogni t , perciò l'unica soluzione costante è $y(x) \equiv 1$.

b) Le altre soluzioni si trovano ponendo

$$F(y) = \int_0^y \frac{1}{(1 - z)^2} dz = \frac{1}{1 - y} - 1$$

e

$$\begin{aligned} G(t) &= \int \frac{t + 1}{t^2 + 4} dt = \frac{1}{2} \int \frac{2t}{t^2 + 4} dt + \int \frac{1}{t^2 + 4} dt \\ &\quad (\text{ponendo } u = \frac{t}{2}) \\ &= \frac{1}{2} \log(t^2 + 4) + \frac{1}{2} \int \frac{1}{u^2 + 1} du \\ &= \frac{1}{2} \log(t^2 + 4) + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{t}{2}. \end{aligned}$$

Le soluzioni $y(t)$ sono quelle per cui $F(y(t)) - G(t)$ è costante ($\equiv c$, $c \in \mathbb{R}$), cioè

$$\frac{1}{1 - y(t)} = 1 + \frac{1}{2} \log(t^2 + 4) + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{t}{2} + c,$$

da cui si ricava

$$y(t) = 1 - \frac{1}{1 + \log \sqrt{t^2 + 4} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{t}{2} + c}.$$

Imponendo la condizione $y(0) = 0$ risulta $c = -\log 2$, da cui

$$y(t) = 1 - \frac{1}{1 + \log \frac{\sqrt{t^2 + 4}}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{t}{2}}.$$

5) (**Facoltativo**) Calcolare il limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n n!}{(2n)!}.$$

Svolgimento. La successione è infinitesima, perché è il termine generale della serie convergente

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n n!}{(2n)!}.$$

Quest'ultima converge per il criterio del rapporto. Infatti si ha

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n + 1)^{n+1} (n + 1)! (2n)!}{(2(n + 1))! n^n n!} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \frac{(n + 1)!}{n!} \frac{(2n)!}{(2(n + 1))!} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \frac{(n + 1)^2}{(2n + 2)(2n + 1)} = \frac{e}{4} < 1. \end{aligned}$$

TEMA 2

1) Data la funzione

$$f(x) = e^{\frac{1}{x+1}} \frac{1}{x+1},$$

- a) determinare il dominio D e studiare il segno di f ;
- b) determinare i limiti di f agli estremi di D e studiare la prolungabilità di f ;
- c) calcolare la derivata e studiare la monotonia di f ; determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto; (FACOLTATIVO) calcolare i limiti significativi di f' ;
- d) disegnare un grafico qualitativo di f .

Svolgimento. a) $D = \{x \neq -1\}$. Il segno di f è il segno di $x + 1$.

b) Si ha

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

e

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = 0$$

(quest'ultimo risulta dal limite fondamentale $\lim_{y \rightarrow +\infty} ye^{-y} = 0$ con il cambio di variabile $y = \frac{1}{x+1}$). Perciò f risulta prolungabile in $x = -1$, ponendo $f(-1) = 0$, e la prolungata è continua per $x \rightarrow -1^-$ (ma non per $x \rightarrow -1^+$).

c) Si ha, per $x \neq -1$,

$$f'(x) = \frac{\frac{-1}{x+1}e^{\frac{1}{x+1}} - e^{\frac{1}{x+1}}}{(x+1)^2} = -\frac{x+2}{(x+1)^3}e^{\frac{1}{x+1}},$$

che risulta > 0 se e solo se $-2 < x < -1$. Quindi f è strettamente decrescente in $] -\infty, -2[$ e in $] -1, +\infty[$ e $x = -2$ è il punto di minimo assoluto, con $f(-2) = \frac{-1}{e}$. L'unico limite significativo di $f'(x)$ è

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f'(x) = 0,$$

che risulta dal limite fondamentale $\lim_{y \rightarrow +\infty} y^\alpha e^{-y} = 0$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.

d) Il grafico di f è in figura 2.

2) Calcolare il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}} - \cos(x + x^2)}{(\operatorname{arctg} x)^\alpha}$$

al variare del parametro $\alpha > 0$.

Svolgimento. Il denominatore è asintotico a x^α per $x \rightarrow 0^+$. Per il numeratore, ricordiamo che, per $y \rightarrow 0$, $e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2} + o(y^2)$ e $\cos y = 1 - \frac{y^2}{2} + \frac{1}{24}y^4 + o(y^4)$, per cui si ha, per $x \rightarrow 0$

$$e^{-\frac{x^2}{2}} = 1 + \frac{-x^2}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{-x^2}{2} \right)^2 + o(x^4)$$

$$\cos(x + x^2) = 1 - \frac{1}{2}(x + x^2)^2 + \frac{1}{24}(x + x^2)^4 + o(x + x^2)^4 = 1 - \frac{1}{2}(x^2 + 2x^3) + o(x^3),$$

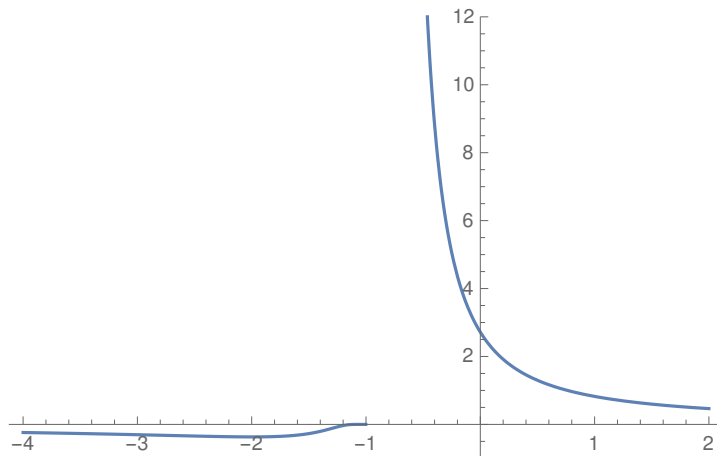


Figura 2: Il grafico di f (Tema 2).

da cui

$$e^{-\frac{x^2}{2}} - \cos(x + x^2) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3) - \left(1 - \frac{x^2}{2} - x^3 + o(x^3)\right) = x^3 + o(x^3).$$

Risulta perciò

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}} - \cos(x + x^2)}{\operatorname{arctg}^\alpha x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^3 + o(x^3)}{x^\alpha} = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha < 3 \\ 1 & \text{se } \alpha = 3 \\ +\infty & \text{se } \alpha > 3. \end{cases}$$

3) Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} n \log(n-1)}{n^2}.$$

Svolgimento. Si ha

$$\left| \frac{\operatorname{sen} n \log(n-1)}{n^2} \right| \leq \frac{\log(n-1)}{n^2} = o\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$$

per $n \rightarrow \infty$ (perché $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{\frac{3}{2}} \log(n-1)}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(n-1)}{\sqrt{n}} = 0$). Siccome la serie con termine generale $n^{-\frac{3}{2}}$ converge, la serie data converge assolutamente e quindi converge.

4) Data l'equazione differenziale

$$y' = (y + 2)^2 \frac{2t - 1}{t^2 + 9},$$

- a) determinarne le soluzioni costanti;
- b) calcolare la soluzione y che soddisfa la condizione $y(0) = 0$.

Svolgimento. a) Le soluzioni costanti sono quelle per cui il secondo membro è nullo per ogni t , perciò l'unica soluzione costante è $y(x) \equiv -2$.

b) Le altre soluzioni si trovano ponendo

$$F(y) = \int_0^y \frac{1}{(z+2)^2} dz = \frac{-1}{y+2} + \frac{1}{2}$$

e

$$\begin{aligned} G(t) &= \int \frac{2t-1}{t^2+9} dt = \int \frac{2t}{t^2+9} dt - \int \frac{1}{t^2+9} dt \\ &\quad (\text{ponendo } u = \frac{t}{3}) \\ &= \log(t^2+9) + \frac{1}{3} \int \frac{1}{u^2+1} du \\ &= \log(t^2+9) + \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{t}{3}. \end{aligned}$$

Le soluzioni $y(t)$ sono quelle per cui $F(y(t)) - G(t)$ è costante ($\equiv c, c \in \mathbb{R}$), cioè

$$\frac{-1}{y(t)+2} = -\frac{1}{2} + \log(t^2+9) + \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{t}{3} + c,$$

da cui si ricava

$$y(t) = -2 + \frac{1}{\frac{1}{2} + \log(t^2+9) + \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{t}{3} + c}.$$

Imponendo la condizione $y(0) = 0$ risulta $c = \log 9$, da cui

$$y(t) = -2 + \frac{1}{\frac{1}{2} + \log(t^2+9) + \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{t}{3} + \log 9}.$$

5) **(Facoltativo)** Calcolare il limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n n!}{(2n)!}.$$

Svolgimento. V. Tema 1.