

## Ingegneria Meccanica, Canale 2

### Prova scritta di Analisi Matematica 1

Padova, 19.2.2020

#### TEMA 1

1) Data la funzione

$$f(x) = \log |\log(x - 2)|,$$

- determinare il dominio  $D$  e studiare il segno di  $f$ ;
- determinare i limiti di  $f$  agli estremi di  $D$ ;
- studiare la derivabilità, calcolare la derivata e studiare la monotonia di  $f$ ; determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto;
- calcolare la derivata seconda e studiare la concavità e la convessità di  $f$ ;
- disegnare un grafico qualitativo di  $f$ .

*Svolgimento.* a)

$$\begin{aligned} D &= \{x \in \mathbb{R} : x > 2 \text{ e } \log(x - 2) \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x > 2 \text{ e } x - 2 \neq 1\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : x > 2 \text{ e } x \neq 3\} = ]2, 3[ \cup ]3, +\infty[. \end{aligned}$$

Inoltre, per  $x \in D$ ,  $f(x) > 0$  se e solo se  $|\log(x - 2)| > 1$ , cioè se e solo se  $\log(x - 2) > 1$  oppure  $\log(x - 2) < -1$ , cioè se e solo se  $x > e + 2$  oppure  $2 < x < 2 + 1/e$ .

b)  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = -\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .

c)  $f$  è derivabile in tutto  $D$  perché in tutto  $D$  l'argomento del valore assoluto è diverso da 0 e quindi si possono applicare le regole di derivazione. Si ha quindi, per  $x \in D$ ,

$$f'(x) = \frac{\operatorname{sgn}(\log(x - 2))}{|\log(x - 2)|} \frac{1}{x - 2} = \frac{1}{(x - 2) \log(x - 2)}.$$

Il segno di  $f'$  è quindi il segno di  $\log(x - 2)$ , che è positivo se e solo se  $x > 3$ . Perciò  $f$  è strettamente decrescente in  $]2, 3[$  e strettamente crescente in  $]3, +\infty[$ . Non ci sono quindi punti di estremo per  $f$ .

d) Si ha, per  $x \in D$ ,

$$f''(x) = -\frac{\log(x - 2) + 1}{(x - 2)^2 \log^2(x - 2)},$$

da cui si ricava che  $f''(x) > 0$  se e solo se  $\log(x - 2) < -1$ ,  $x \in D$ , cioè se e solo se  $2 < x < 2 + 1/e$ . Quindi  $f$  è strettamente convessa in  $]2, 2 + 1/e[$ , in  $2 + 1/e$  ha un flesso, ed è strettamente concava in  $]2 + 1/e, 3[$  ed in  $]3, +\infty[$ .

e) Il grafico di  $f$  è in figura 1.

2) Calcolare, al variare del parametro reale  $\alpha$ , il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos x - e^{\frac{x^2}{2}} + e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^\alpha \operatorname{arctg} x^3}$$

*Svolgimento.* Dagli sviluppi  $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ ,  $e^x = 1 + x + o(x)$ , da cui  $e^{\frac{x^2}{2}} = 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ , e dal limite fondamentale  $e^{-\frac{1}{x^2}} = o(x^2)$  per  $x \rightarrow 0$  si ricava che

$$\cos x - e^{\frac{x^2}{2}} + e^{-\frac{1}{x^2}} = -x^2 + o(x^2) \quad \text{per } x \rightarrow 0.$$

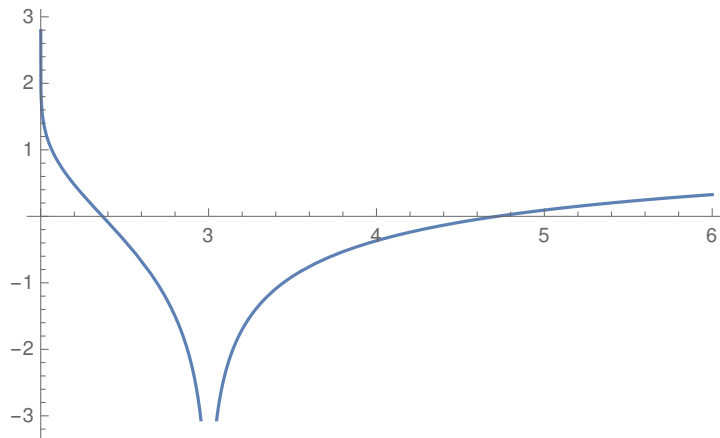


Figura 1: Il grafico di  $f$  (Tema 1).

Il denominatore è asintotico a  $x^{3+\alpha}$  per  $x \rightarrow 0^+$ , per cui

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos x - e^{\frac{x^2}{2}} + e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^\alpha \operatorname{arctg} x^3} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x^2 + o(x^2)}{x^{3+\alpha}} = \begin{cases} 0 & \text{per } \alpha < -1 \\ -1 & \text{per } \alpha = -1 \\ -\infty & \text{per } \alpha > -1. \end{cases}$$

3) Studiare la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x}}{3 + e^{2x}} dx$$

al variare di  $\alpha \in \mathbb{R}$  e calcolarlo per  $\alpha = 0$ .

*Svolgimento.* L'integrando  $f(x) = \frac{e^{-\alpha x}}{3 + e^{2x}}$  è continuo nel dominio d'integrazione, per cui va studiata la convergenza dell'integrale solo per  $x \rightarrow +\infty$ . Osserviamo che  $f(x) > 0$  per ogni  $x$ . Si ha

$$f(x) = \frac{e^{-\alpha x}}{3 + e^{2x}} = \frac{1}{e^{(2+\alpha)x} + 3e^{\alpha x}},$$

per cui se  $\alpha \leq -2$  allora  $f(x) \geq \frac{1}{2}$  definitivamente per  $x \rightarrow +\infty$  e quindi l'integrale diverge. Se invece  $\alpha > -2$  allora  $f(x) = o(\frac{1}{x^2})$  per  $x \rightarrow +\infty$ , dal limite fondamentale

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 e^{-\alpha x}}{3 + e^{2x}} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^{(2+\alpha)x} + 3e^{\alpha x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^{(2+\alpha)x} + o(e^{(2+\alpha)x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^{(2+\alpha)x}} = 0, \end{aligned}$$

per cui l'integrale converge.

Per quanto riguarda il calcolo, risulta, per  $\alpha = 0$ ,

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{3 + e^{2x}} dx = (\text{ponendo } x = \log t) \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t(3 + t^2)}.$$

Quest'ultimo integrale si calcola mediante scomposizione in fratti semplici. Si ha

$$\frac{1}{t(3 + t^2)} = \frac{A}{t} + \frac{Bt + C}{3 + t^2},$$

da cui si ricava

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ C = 0 \\ 3A = 1, \end{cases}$$

cioè  $A = \frac{1}{3}$ ,  $B = -\frac{1}{3}$ ,  $C = 0$ . Quindi

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t(3+t^2)} &= \frac{1}{3} \int_1^{+\infty} \left( \frac{1}{t} - \frac{t}{3+t^2} \right) dt = \left( \frac{1}{3} \log t - \frac{1}{6} \log(3+t^2) \right) \Big|_1^{+\infty} \\ &= \log \frac{\sqrt[3]{t}}{\sqrt[6]{3+t^2}} \Big|_1^{+\infty} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \log \frac{\sqrt[3]{t}}{\sqrt[6]{3+t^2}} - \log \frac{1}{\sqrt[6]{4}} \\ &= \log 1 - \log \frac{1}{\sqrt[6]{4}} = \frac{1}{3} \log 2. \end{aligned}$$

In alternativa, si poteva effettuare la sostituzione più semplice

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{3+e^{2x}} dx = (\text{ponendo } 2x = \log t) \frac{1}{2} \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t(3+t)}$$

procedendo poi per scomposizione in fratti semplici.

4) Data l'equazione differenziale

$$y'' - 4y' + 4y = 1 - e^t,$$

a) determinarne l'integrale generale;

b) dire se ammette soluzioni limitate definitivamente per  $t \rightarrow -\infty$  ed in caso affermativo calcolarle;

c) determinare la soluzione  $y$  che soddisfa le condizioni  $y(0) = -\frac{3}{4}$ ,  $y'(0) = 1$ .

*Svolgimento.* a) L'equazione caratteristica è  $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$ , che ha la soluzione  $\lambda = 2$  con molteplicità 2. L'integrale generale dell'equazione è perciò

$$y(t) = c_1 e^{2t} + c_2 t e^{2t} + \varphi(t),$$

dove  $\varphi$  è una soluzione particolare di  $y'' - 4y' + 4y = 1 - e^t$  da determinare. Siccome né 0 né 1 sono soluzioni dell'equazione caratteristica, la soluzione particolare  $\varphi$  è del tipo

$$\varphi(t) = A + B e^t,$$

con  $A$  e  $B$  da determinarsi. Imponendo che  $\varphi$  sia soluzione, si ricava

$$\varphi''(t) - 4\varphi'(t) + 4\varphi(t) = 4A + B e^t(1 - 4 + 4) = 1 - e^t,$$

da cui si ottiene  $A = \frac{1}{4}$ ,  $B = -1$ . L'integrale generale dell'equazione è perciò

$$y(t) = c_1 e^{2t} + c_2 t e^{2t} + \frac{1}{4} - e^t.$$

b) Per ogni soluzione  $y(t)$  si ha che  $\lim_{t \rightarrow -\infty} y(t) = \frac{1}{4}$ , per cui tutte le soluzioni sono limitate definitivamente per  $x \rightarrow -\infty$ .

c) Imponendo le condizioni iniziali risulta

$$y(0) = c_1 + \frac{1}{4} - 1 = -\frac{3}{4},$$

da cui  $c_1 = 0$  e (per  $c_1 = 0$ )

$$y'(t) = c_2 e^{2t} + 2c_2 t e^{2t} - e^t.$$

Quindi  $y'(0) = c_2 - 1 = 1$ , da cui si ricava  $c_2 = 2$ . La soluzione del problema di Cauchy dato è perciò

$$y(t) = 2te^{2t} + \frac{1}{4} - e^t.$$

5) (**Facoltativo**) Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} \frac{e^{-x}}{x} dx.$$

*Svolgimento.* Per l'additività rispetto all'intervallo di integrazione, si ha

$$\sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} \frac{e^{-x}}{x} dx = \int_1^{n+1} \frac{e^{-x}}{x} dx,$$

per cui la serie converge se e solo se converge l'integrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx,$$

che è appunto convergente, in quanto l'integrando è  $\leq e^{-x}$  in  $[1, +\infty[$ .

In alternativa, usando il teorema della media, per ogni  $n \geq 1$  si trova  $x_n \in [n, n+1]$  tale che

$$\int_n^{n+1} \frac{e^{-x}}{x} dx = \frac{e^{-x_n}}{x_n}.$$

Siccome  $f(x) = \frac{e^{-x}}{x}$  è decrescente nel dominio di integrazione, risulta

$$\frac{e^{-x_n}}{x_n} \leq \frac{e^{-n}}{n},$$

per cui

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} \frac{e^{-x}}{x} dx \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n}}{n}$$

e quest'ultima serie converge per il criterio del confronto, dato che  $\frac{e^{-n}}{n} \leq \frac{1}{e^n}$  e quest'ultima serie, geometrica di ragione  $1/e$ , converge.

## TEMA 2

1) Data la funzione

$$f(x) = \log |\log(3-x)|,$$

- a) determinare il dominio  $D$  e studiare il segno di  $f$ ;
- b) determinare i limiti di  $f$  agli estremi di  $D$ ;
- c) studiare la derivabilità, calcolare la derivata e studiare la monotonia di  $f$ ; determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto;
- d) calcolare la derivata seconda e studiare la concavità e la convessità di  $f$ ;
- e) disegnare un grafico qualitativo di  $f$ .

*Svolgimento.* a)

$$D = \{x \in \mathbb{R} : 3 - x > 0 \text{ e } \log(3 - x) \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x < 3 \text{ e } 3 - x \neq 1\}$$

$$= \{x \in \mathbb{R} : x < 3 \text{ e } x \neq 2\} = ]-\infty, 2[ \cup ]2, 3[.$$

Inoltre, per  $x \in D$ ,  $f(x) > 0$  se e solo se  $|\log(3 - x)| > 1$ , cioè se e solo se  $\log(3 - x) > 1$  oppure  $\log(3 - x) < -1$ , cioè se e solo se  $3 > x > 3 - 1/e$  oppure  $x < 3 - e$ .

b)  $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ .

c)  $f$  è derivabile in tutto  $D$  perché in tutto  $D$  l'argomento del valore assoluto è diverso da 0 e quindi si possono applicare le regole di derivazione. Si ha quindi, per  $x \in D$ ,

$$f'(x) = \frac{\operatorname{sgn}(\log(3 - x))}{|\log(3 - x)|} \frac{-1}{3 - x} = \frac{1}{(x - 3) \log(3 - x)}.$$

Il segno di  $f'$  è quindi l'opposto del segno di  $\log(3 - x)$ , che è positivo se e solo se  $x < 2$ . Perciò  $f$  è strettamente decrescente in  $] -\infty, 2[$  e strettamente crescente in  $]2, 3[$ . Non ci sono quindi punti di estremo per  $f$ .

d) Si ha, per  $x \in D$ ,

$$f''(x) = -\frac{\log(3 - x) + 1}{(3 - x)^2 \log^2(3 - x)},$$

da cui si ricava che  $f''(x) > 0$  se e solo se  $\log(3 - x - 2) < -1$ ,  $x \in D$ , cioè se e solo se  $3 - x < 1/e$ . Quindi  $f$  è strettamente concava in  $] -\infty, 2$  ed in  $]2, 3 - 1/e[$ , in  $3 - 1/e$  ha un flesso, ed è strettamente convessa in  $]3 - 1/e, 3[$ .

e) Il grafico di  $f$  è in figura 2.

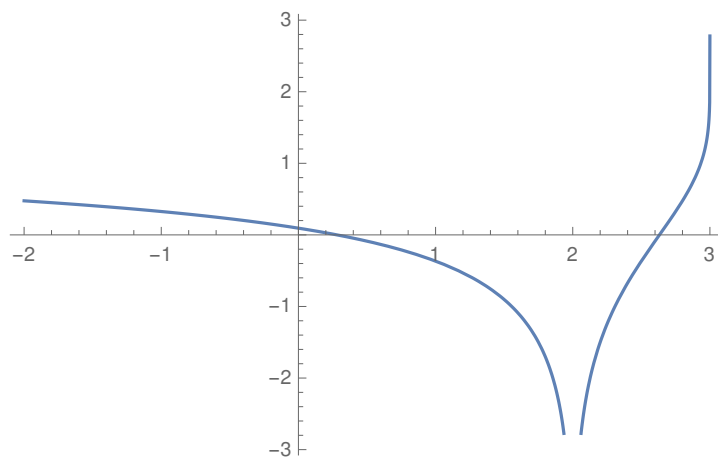


Figura 2: Il grafico di  $f$  (Tema 2).

2) Calcolare, al variare del parametro reale  $\alpha$ , il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x - \sinh x + e^{-\frac{1}{2x^2}}}{x^\alpha \log(1 + x^2)}$$

*Svolgimento.* Dagli sviluppi  $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$ ,  $\sinh x = x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$  e dal limite fondamentale  $e^{-\frac{1}{2x^2}} = o(x^3)$  per  $x \rightarrow 0$  si ricava che

$$\sin x - \sinh x + e^{-\frac{1}{2x^2}} = -\frac{x^3}{3} + o(x^3) \quad \text{per } x \rightarrow 0.$$

Il denominatore è asintotico a  $x^{2+\alpha}$  per  $x \rightarrow 0^+$ , per cui

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x - \sinh x + e^{-\frac{1}{2x^2}}}{x^\alpha \log(1+x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\frac{x^3}{3} + o(x^3)}{x^{2+\alpha}} = \begin{cases} 0 & \text{per } \alpha < 1 \\ -\frac{1}{3} & \text{per } \alpha = 1 \\ -\infty & \text{per } \alpha > 1. \end{cases}$$

3) Studiare la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{2\alpha x}}{4 + e^{2x}} dx$$

al variare di  $\alpha \in \mathbb{R}$  e calcolarlo per  $\alpha = 0$ .

*Svolgimento.* L'integrando  $f(x) = \frac{e^{2\alpha x}}{4 + e^{2x}}$  è continuo nel dominio d'integrazione, per cui va studiata la convergenza dell'integrale solo per  $x \rightarrow +\infty$ . Osserviamo che  $f(x) > 0$  per ogni  $x$ . Si ha

$$f(x) = \frac{e^{2\alpha x}}{4 + e^{2x}} = \frac{1}{e^{2x(1-\alpha)} + 4e^{-2\alpha x}},$$

per cui se  $\alpha \geq 1$  allora  $f(x) \geq \frac{1}{2}$  definitivamente per  $x \rightarrow +\infty$  e quindi l'integrale diverge. Se invece  $\alpha < 1$  allora  $f(x) = o(\frac{1}{x^2})$  per  $x \rightarrow +\infty$ , dal limite fondamentale

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 e^{2\alpha x}}{4 + e^{2x}} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^{2x(1-\alpha)} + 4e^{-2\alpha x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^{2x(1-\alpha)} + o(e^{2x(1-\alpha)})} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^{2x(1-\alpha)}} = 0, \end{aligned}$$

per cui l'integrale converge.

Per quanto riguarda il calcolo, risulta, per  $\alpha = 0$ ,

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{4 + e^{2x}} dx = (\text{ponendo } x = \log t) \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t(4 + t^2)}.$$

Quest'ultimo integrale si calcola mediante scomposizione in fratti semplici. Si ha

$$\frac{1}{t(4 + t^2)} = \frac{A}{t} + \frac{Bt + C}{4 + t^2},$$

da cui si ricava

$$\begin{cases} A + B & = 0 \\ C & = 0 \\ 4A & = 1, \end{cases}$$

cioè  $A = \frac{1}{4}$ ,  $B = -\frac{1}{4}$ ,  $C = 0$ . Quindi

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t(4 + t^2)} &= \frac{1}{4} \int_1^{+\infty} \left( \frac{1}{t} - \frac{t}{4 + t^2} \right) dt = \left( \frac{1}{4} \log t - \frac{1}{8} \log(4 + t^2) \right) \Big|_1^{+\infty} \\ &= \log \frac{\sqrt[4]{t}}{\sqrt[4]{4 + t^2}} \Big|_1^{+\infty} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \log \frac{\sqrt[4]{t}}{\sqrt[4]{4 + t^2}} - \log \frac{1}{\sqrt[4]{5}} \\ &= \log 1 - \log \frac{1}{\sqrt[4]{5}} = \frac{1}{4} \log 5. \end{aligned}$$

Si veda anche lo svolgimento del tema 1 per una sostituzione più semplice.

4) Data l'equazione differenziale

$$y'' + 6y' + 9y = 1 + e^{-t},$$

a) determinarne l'integrale generale;

b) dire se ammette soluzioni limitate definitivamente per  $t \rightarrow +\infty$  ed in caso affermativo calcolarle;

c) determinare la soluzione  $y$  che soddisfa le condizioni  $y(0) = \frac{13}{36}$ ,  $y'(0) = \frac{1}{4}$ .

*Svolgimento.* a) L'equazione caratteristica è  $\lambda^2 + 6\lambda + 9 = 0$ , che ha la soluzione  $\lambda = -3$  con molteplicità 2. L'integrale generale dell'equazione è perciò

$$y(t) = c_1 e^{-3t} + c_2 t e^{-3t} + \varphi(t),$$

dove  $\varphi$  è una soluzione particolare di  $y'' + 6y' + 9y = 1 + e^{-t}$  da determinare. Siccome né 0 né  $-1$  sono soluzioni dell'equazione caratteristica, la soluzione particolare  $\varphi$  è del tipo

$$\varphi(t) = A + B e^{-t},$$

con  $A$  e  $B$  da determinarsi. Imponendo che  $\varphi$  sia soluzione, si ricava

$$\varphi''(t) + 6\varphi'(t) + 9\varphi(t) = 9A + B e^{-t}(1 - 6 + 9) = 1 + e^{-t},$$

da cui si ottiene  $A = \frac{1}{9}$ ,  $B = \frac{1}{4}$ . L'integrale generale dell'equazione è perciò

$$y(t) = c_1 e^{-3t} + c_2 t e^{-3t} + \frac{1}{9} + \frac{1}{4} e^{-t}.$$

b) Per ogni soluzione  $y(t)$  si ha che  $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = \frac{1}{9}$ , per cui tutte le soluzioni sono limitate definitivamente per  $x \rightarrow +\infty$ .

c) Imponendo le condizioni iniziali risulta

$$y(0) = c_1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{4} = \frac{13}{36},$$

da cui  $c_1 = 0$  e (per  $c_1 = 0$ )

$$y'(t) = c_2 e^{-3t} - 3c_2 t e^{-3t} - \frac{1}{4} e^{-t}.$$

Quindi  $y'(0) = c_2 - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$ , da cui si ricava  $c_2 = \frac{1}{2}$ . La soluzione del problema di Cauchy dato è perciò

$$y(t) = \frac{1}{2} t e^{-3t} + \frac{1}{9} + \frac{1}{4} e^{-t}.$$

5) **(Facoltativo)** Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} \frac{e^{-x}}{x} dx.$$

*Svolgimento.* V. Tema 1.