Ingegneria Meccanica, Canale 2

Prova scritta di Analisi Matematica 1

Padova, 6.7.2020

1) Data la funzione

$$f(x) = \frac{\left|x^{\frac{3}{2}} - 8\right|}{\sqrt{x}},$$

a) determinare il dominio D, i limiti di f agli estremi di D e l'eventuale asintoto obliquo;

b) studiare la derivabilità, calcolare la derivata e studiare la monotonia di f; determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto; calcolare i limiti significativi di f';

c) calcolare la derivata seconda e studiare la concavità e la convessità di f;

d) disegnare un grafico qualitativo di f.

Svolgimento. a) $D =]0, +\infty[$ e $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to+\infty} + = \infty$. Si ha inoltre

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{\frac{3}{2}} - 8}{x^{\frac{3}{2}}} = 1$$

e

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} f(x) - x &= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{\frac{3}{2}} - 8 - x\sqrt{x}}{x^{\frac{1}{2}}} \\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{-8}{x^{\frac{1}{2}}} = 0,\end{aligned}$$

per cui la retta $y = x$ è asintoto obliquo per f per $x \to +\infty$.

b) L'argomento del modulo nel numeratore di f si annulla in $x = 4$. Utilizzando le regole di derivazione, risulta percioò che f è derivabile per ogni $x > 0$, $x \neq 4$. Si ha

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{\operatorname{sgn}(x^{\frac{3}{2}} - 8)x^{\frac{1}{2}}\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}|x^{\frac{3}{2}} - 8|}{x} \\ &= \operatorname{sgn}(x^{\frac{3}{2}} - 8)\frac{3x^{\frac{3}{2}} - (x^{\frac{3}{2}} - 8)}{2x^{\frac{3}{2}}} \\ &= \begin{cases} -\frac{x^{\frac{3}{2}}+4}{x^{\frac{3}{2}}} & \text{se } x < 4 \\ \frac{x^{\frac{3}{2}}+4}{x^{\frac{3}{2}}} & \text{se } x > 4. \end{cases}\end{aligned}$$

La funzione è pertanto strettamente decrescente in $]0, 4[$, mentre è strettamente crescente in $]4, +\infty[$ e quindi $x = 4$ è il punto di minimo assoluto per f. Si ha inoltre

$$\lim_{x\to 4^-} f'(x) = -\frac{3}{2} = -\lim_{x\to 4^+} f'(x),$$

per cui $x = 4$ è un punto angoloso per f.

c) Per $x > 0$, $x \neq 4$ si ha

$$f''(x) = \begin{cases} \frac{6}{x^{\frac{5}{2}}} & \text{se } x < 4 \\ -\frac{6}{x^{\frac{5}{2}}} & \text{se } x > 4. \end{cases}$$

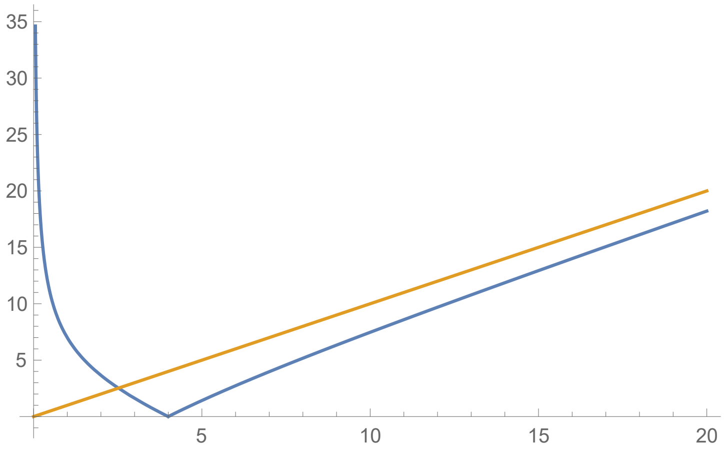

Figura 1: Il grafico di f.

Perciò f è convessa in $]0,4[$ mentre è concava in $]4,+\infty[$.
d) Il grafico di f, insieme al suo asintoto obliquo, è in figura 1.

2) Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|n\sin\frac{1}{n}-e^{\frac{-1}{n^2}}\right|^{\alpha}$$

al variare del parametro $\alpha>0$.
Svolgimento. La serie ha termini positivi e quindi è possibile usare il criterio del confronto asintotico. Sviluppando l'argomento del modulo per $n\to\infty$ (cioè usando gli sviluppi di MacLaurin di $\sin x$ e di e^x) si ha

$$\begin{aligned} n\sin\frac{1}{n} &= n\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{6}\frac{1}{n^3}+o\left(\frac{1}{n^4}\right)\right)=1-\frac{1}{6}\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\\ e^{\frac{-1}{n^2}} &= 1-\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^3}\right), \end{aligned}$$

per cui, per $n\to\infty$,

$$n\sin\frac{1}{n}-e^{\frac{-1}{n^2}}=\frac{5}{6}\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Di conseguenza la serie ha lo stesso carattere della serie con termine generale

$$\frac{1}{n^{2\alpha}},$$

per cui converge se e solo se $2\alpha>1$, cioè se e solo se $\alpha>\frac{1}{2}$, e diverge per $\alpha\le\frac{1}{2}$.

3) Studiare la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_1^{\log 4}(x-1)^{\alpha}\frac{e^{3x}}{\sqrt{e^{2x}-e^2}}\,\mathrm{d}x$$

al variare di $\alpha\in\mathbb{R}$ e calcolarlo per $\alpha=0$.

Svolgimento. Detta $f(x)$ l'integranda, essa risulta continua in $]1, \log 4]$, per cui bisogna controllare la convergenza dell'integrale per $x \to 1$. Siccome $f(x) \geq 0$ per ogni $x > 1$ si può usare il criterio del confronto asintotico. Risulta, per $x \to 1^+$,

$$f(x) = \frac{e^{3x}}{e} \frac{(x-1)^\alpha}{\sqrt{e^{2(x-1)} - 1}} = \frac{e^{3x}}{e} \frac{(x-1)^\alpha}{\sqrt{2(x-1) + o(x-1)}} \sim (x-1)^{\alpha - \frac{1}{2}}.$$

Quindi l'integrale è convergente se e solo se $\alpha - \frac{1}{2} > -1$, cioè se e solo se $\alpha > -\frac{1}{2}$.

Per quanto riguarda il calcolo, si ha

$$\begin{aligned}
&\int_1^{\log 4} \frac{e^{3x}}{\sqrt{e^{2x} - e^2}} \, \mathrm{d}x = \\
&\text{(sostituendo } e^x = t, \text{ cioè } x = \log t) = \int_e^4 \frac{t^3}{t\sqrt{t^2 - e^2}} \, \mathrm{d}t = \int_e^4 \frac{t^2}{\sqrt{t^2 - e^2}} \, \mathrm{d}t \\
&\text{(ponendo } t = e \cosh s, \text{ da cui } \mathrm{d}t = e \sinh s \, \mathrm{d}s) = e^2 \int_0^{\operatorname{settcosh} \frac{4}{e}} \frac{\cosh^2 s \sinh s}{\sinh s} \, \mathrm{d}s \\
&= e^2 \int_0^{\operatorname{settcosh} \frac{4}{e}} \cosh^2 s \, \mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

Quest'ultimo integrale si calcola, ad esempio, per parti: si ha

$$\begin{aligned}
\int_0^{\operatorname{settcosh} \frac{4}{e}} \cosh^2 s \, \mathrm{d}s &= \cosh s \sinh s \Big|_0^{\operatorname{settcosh} \frac{4}{e}} - \int_0^{\operatorname{settcosh} \frac{4}{e}} \sinh^2 s \, \mathrm{d}s \\
&= \frac{4}{e} \sqrt{\frac{16}{e^2} - 1} - \int_0^{\operatorname{settcosh} \frac{4}{e}} \left(\cosh^2 s - 1 \right) \mathrm{d}s \\
&= \frac{4}{e} \sqrt{\frac{16}{e^2} - 1} + \operatorname{settcosh} \frac{4}{e} - \int_0^{\operatorname{settcosh} \frac{4}{e}} \cosh^2 s \, \mathrm{d}s,
\end{aligned}$$

da cui risulta

$$\int_0^{\operatorname{settcosh} \frac{4}{e}} \cosh^2 s \, \mathrm{d}s = \frac{\frac{4}{e} \sqrt{\frac{16}{e^2} - 1} + \operatorname{settcosh} \frac{4}{e}}{2}.$$

Si ha perciò

$$\int_1^{\log 4} \frac{e^{3x}}{\sqrt{e^{2x} - e^2}} \, \mathrm{d}x = 2\sqrt{16 - e^2} + \frac{e^2}{2} \operatorname{settcosh} \frac{4}{e}.$$

Attenzione. Molti studenti hanno commesso errori sulle propietà delle potenze (semplificazioni errate).

4) Data l'equazione differenziale

$$y'' + 4y = \sin t,$$

a) dire se ammette soluzioni costanti;
b) determinarne l'integrale generale;
c) determinarne la soluzione che soddisfa le condizioni iniziali $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$;
d) dire se ammette soluzioni periodiche di periodo 2π.

Svolgimento. a) Ovviamente l'equazione non ammette soluzioni costanti, perché il secondo membro non è costante, mentre per le soluzioni costanti il primo membro lo sarebbe.

b) L'equazione caratteristica è $\lambda^2 + 4 = 0$, che ha le soluzioni complesse coniugate $\lambda = \pm 2i$. Siccome i non è soluzione dell'equazione caratteristica, l'integrale generale è della forma

$$c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t + A \cos t + B \sin t,$$

con A e B da determinarsi. Imponendo che $A\cos t + B\sin t$ sia soluzione, risulta immediatamente $-A\cos t - B\sin t + 4A\cos t + 4B\sin t \equiv \sin t$, da cui $A = 0$ e $B = \frac{1}{3}$. L'integrale generale è perciò

$$c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t + \frac{1}{3}\sin t, \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

c) Imponendo le condizioni iniziali risulta $c_1 = 0$, $c_2 = \frac{5}{6}$, per cui la soluzione richiesta è

$$y(t) = \frac{5}{6}\sin 2t + \frac{1}{3}\sin t.$$

d) Ovviamente tutte le soluzioni sono periodiche di periodo 2π, in quanto somma di funzioni periodiche di periodo π con una funzione periodica di periodo 2π.