

Ingegneria Meccanica, Canale 2
Prova scritta di Analisi Matematica 1

Padova, 3.9.2020

1) Data la funzione

$$f(x) = \frac{|\operatorname{sen} x|}{\sqrt{2} \operatorname{sen} x - 1} \quad \text{per } x \in [0, 2\pi],$$

- a) determinarne il dominio D (nell'intervallo $[0, 2\pi]$), studiarne il segno e calcolarne i limiti agli estremi di D ;
- b) studiare la derivabilità, calcolare la derivata e studiare la monotonia di f ; determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto; calcolare i limiti significativi di f' ;
- c) disegnare un grafico qualitativo di f .

Svolgimento. a) Nell'intervallo $[0, 2\pi]$,

$$D = \left\{ x \in [0, 2\pi] : \operatorname{sen} x \neq \frac{1}{\sqrt{2}} \right\} = \left\{ x \in [0, 2\pi] : x \neq \frac{\pi}{4}, x \neq \frac{3\pi}{4} \right\}.$$

Il segno di f è positivo se e solo se $\operatorname{sen} x > 1/\sqrt{2}$, cioè se e solo se $\frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4}$. Si ha $f(0) = f(2\pi) = 0$ e

$$\lim_{x \rightarrow \pi/4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3\pi/4^+} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \pi/4^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3\pi/4^-} f(x) = +\infty.$$

b) In D , f è sicuramente derivabile dove si possono applicare le regole di derivazione, cioè dove $\operatorname{sen} x \neq 0$, cioè se e solo se $x \neq 0, \pi, 2\pi$ e si ha, per $x \in D$, $x \neq 0, \pi, 2\pi$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\operatorname{sgn}(\operatorname{sen} x) \cos x (\sqrt{2} \operatorname{sen} x - 1) - |\operatorname{sen} x| \sqrt{2} \cos x}{(\sqrt{2} \operatorname{sen} x - 1)^2} \\ &= \frac{\operatorname{sgn}(\operatorname{sen} x)}{(\sqrt{2} \operatorname{sen} x - 1)^2} (\cos x (\sqrt{2} \operatorname{sen} x - 1) - \sqrt{2} \operatorname{sen} x \cos x) \\ &= -\frac{\operatorname{sgn}(\operatorname{sen} x) \cos x}{(\sqrt{2} \operatorname{sen} x - 1)^2}. \end{aligned}$$

Pertanto si ha che $f'(x) \leq 0$ per $0 < x < \pi/4$, $\pi/4 < x < \pi/2$ e $\pi < x < 3\pi/2$, mentre $f'(x) \geq 0$ per $\pi/2 < x < 3\pi/4$, $3\pi/4 < x < \pi$ e per $3\pi/2 < x < 2\pi$. Risulta pertanto che $x = \pi/2$ e $x = 3\pi/2$ sono punti di minimo relativo, mentre $x = \pi$ è un punto di massimo relativo. Si ha inoltre

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} f'(x) = 1 = -\lim_{x \rightarrow \pi^+} f'(x),$$

per cui $x = \pi$ è un punto angoloso.

c) Il grafico di f è in figura ??.

2) Studiare la convergenza assoluta e la convergenza della serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log n}{n} (\operatorname{tg} x)^n$$

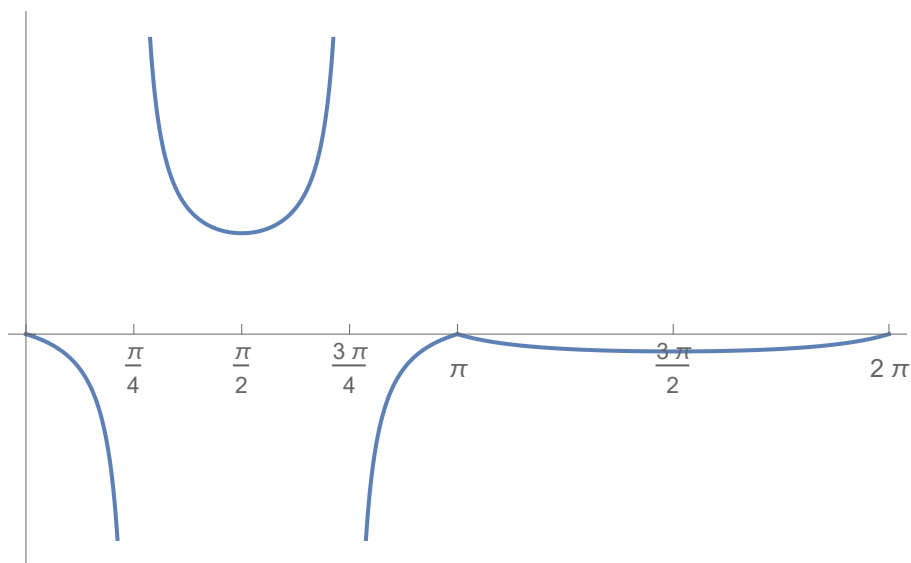


Figura 1: Il grafico di f .

al variare di $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

Svolgimento. Studiamo prima la convergenza assoluta, usando il criterio asintotico del rapporto. Si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(n+1)}{n+1} |\operatorname{tg} x|^{n+1} \frac{n}{\log n} \frac{1}{|\operatorname{tg} x|^n} = |\operatorname{tg} x|.$$

Pertanto la serie converge assolutamente per $|\operatorname{tg} x| < 1$ (cioè per $-\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}$), mentre diverge assolutamente e non converge (perché il termine generale non è infinitesimo) per $-\frac{\pi}{2} < x < -\frac{\pi}{4}$ e per $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$. Per $x = \pm \frac{\pi}{4}$, il criterio asintotico del rapporto non dà informazioni.

Per $x = \frac{\pi}{4}$, la serie diventa

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log n}{n},$$

serie a termini positivi il cui termine generale è maggiore di $\frac{1}{n}$, per cui diverge. Per $x = -\frac{\pi}{4}$ la serie diventa

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\log n}{n},$$

serie a termini di segno alterno che diverge assolutamente ma converge per il criterio di Leibniz, perché il termine $\frac{\log n}{n}$ è infinitesimo e decrescente. Infatti

$$\frac{d \log x}{dx} \frac{1}{x} = \frac{1 - \log x}{x^2},$$

che è negativa per $x > e$.

3) Calcolare il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(e^x - 1)^2 - \operatorname{senh}^2 x}{\operatorname{sen} 2x^\alpha - x^3}$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Svolgimento. Usando gli sviluppi asintotici risulta, per $x \rightarrow 0^+$,

$$(e^x - 1)^2 = \left(x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)^2 = x^2 + x^3 + \frac{x^4}{4} + o(x^2)$$

$$\sinh^2 x = \left(x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^2 = x^2 + \frac{x^4}{3} + o(x^4),$$

da cui

$$(e^x - 1)^2 - \sinh^2 x = x^3 + o(x^3).$$

Risulta inoltre, sempre per $x \rightarrow 0^+$,

$$\sin 2x^\alpha - x^3 = 2x^\alpha + o(x^\alpha) - x^3 = \begin{cases} 2x^\alpha & \text{per } \alpha < 3 \\ x^3 & \text{per } \alpha = 3 \\ -x^3 & \text{per } \alpha > 3. \end{cases}$$

Risulta perciò

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(e^x - 1)^2 - \sinh^2 x}{\sin 2x^\alpha - x^3} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \begin{cases} \frac{x^3 + o(x^3)}{2x^\alpha} & \text{per } \alpha < 3 \\ \frac{x^3 + o(x^3)}{x^3} & \text{per } \alpha = 3 \\ \frac{x^3 + o(x^3)}{-x^3} & \text{per } \alpha > 3. \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{per } \alpha < 3 \\ 1 & \text{per } \alpha = 3 \\ -1 & \text{per } \alpha > 3. \end{cases}$$

4) Data l'equazione differenziale

$$y'(t) = \frac{t}{(t-1)(t^2+1)}(y^2(t) + 4),$$

- dire se ammette soluzioni costanti;
- determinarne la soluzione che soddisfa la condizione iniziale $y(0) = 0$;
- specificare l'intervallo più grande in cui tale soluzione è definita.

Svolgimento. a) L'equazione data non ammette soluzioni costanti perché per tali soluzioni il primo membro (cioè la derivata) si annulla per ogni t , mentre il secondo membro si annulla solo per $t = 0$.

b) Formalmente l'equazione può essere espressa nella forma

$$\int_0^y \frac{dx}{x^2 + 4} = \int_0^t \frac{s}{(s-1)(s^2+1)} ds.$$

Il primo integrale è quasi immediato:

$$\int_0^y \frac{dx}{x^2 + 4} = \frac{1}{4} \int_0^y \frac{1}{\left(\frac{x}{2}\right)^2 + 1} dx = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{y}{2}.$$

Per calcolare il secondo integrale scomponiamo l'integrando in fratti semplici:

$$\frac{s}{(s-1)(s^2+1)} = \frac{A}{s-1} + \frac{Bs+C}{s^2+1},$$

da cui ($A = C = \frac{1}{2}$, $B = -\frac{1}{2}$)

$$\frac{s}{(s-1)(s^2+1)} = \frac{1}{2(s-1)} + \frac{1-s}{2(s^2+1)}.$$

Perciò

$$\begin{aligned} \int_0^t \frac{s}{(s-1)(s^2+1)} ds &= \int_0^t \frac{1}{2(s-1)} ds + \int_0^t \frac{1-s}{2(s^2+1)} ds \\ &= \frac{1}{2} \log |t-1| - \frac{1}{4} \log(t^2+1) + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} t. \end{aligned}$$

Quindi risulta

$$\operatorname{arctg} \frac{y}{2} = \log |t-1| - \frac{1}{2} \log(t^2+1) + \operatorname{arctg} t,$$

da cui si ha

$$y(t) = 2 \operatorname{tg} \left(\log |t-1| - \frac{1}{2} \log(t^2+1) + \operatorname{arctg} t \right).$$

c) L'intervallo massimale in cui è definita la soluzione deve contenere l'istante iniziale $t = 0$ ed è perciò la semiretta $] -\infty, 1[$. In tale semiretta la soluzione può essere espressa come

$$y(t) = 2 \operatorname{tg} \left(\log \frac{1-t}{\sqrt{t^2+1}} + \operatorname{arctg} t \right).$$