

## Ingegneria Meccanica, Canale 2

### Prova scritta di Analisi Matematica 1

Padova, 25.1.2021

#### Prima parte

Tempo a disposizione: 60 minuti.

**NB: ogni domanda può avere più di una risposta esatta.**

**Punteggio massimo 15 punti.**

1. Si considerino le funzioni

$$f_1(x) = x \log x, \quad f_2(x) = \sqrt{x}, \quad f_3(x) = x^{\frac{3}{2}}.$$

Si ha:

- A) per  $x \rightarrow 0^+$ ,  $f_3(x) = o(f_1(x)) = o(f_2(x))$
- B) per  $x \rightarrow 0^+$ ,  $f_2(x) = o(f_1(x)) = o(f_3(x))$
- C) per  $x \rightarrow +\infty$ ,  $f_2(x) = o(f_1(x)) = o(f_3(x))$
- D) per  $x \rightarrow +\infty$ ,  $f_1(x) = o(f_2(x)) = o(f_3(x))$
- E) per  $x \rightarrow +\infty$ ,  $f_3(x) = o(f_2(x)) = o(f_1(x))$

2. Il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin^2 x - \arctan(x^2)}{\cos(x) + \cosh(x) - 2}$$

- A) è  $+\infty$
- B) è  $-\infty$
- C) è  $\frac{1}{4}$
- D) è  $-4$
- E) nessuna delle altre possibilità è corretta

L'equazione

$$\int_1^x \frac{\sinh t}{t} dt - 1 = 0$$

in  $]1, +\infty[$

3.

- A) non ha soluzioni
- B) ha infinite soluzioni
- C) ha una e una sola soluzione
- D) ha due soluzioni distinte
- E) nessuna delle altre possibilità è corretta

4. L'integrale

$$\int \frac{e^x}{1+e^x} dx$$

è uguale a

A)  $-\frac{1}{1+e^x} + c, c \in \mathbb{R}$

B)  $\frac{1}{1+e^x} + c, c \in \mathbb{R}$

C)  $\log(1+e^x) + c, c \in \mathbb{R}$

D)  $\log(1-e^{-x}) + c, c \in \mathbb{R}$

E) nessuna delle altre possibilità è corretta

5. L'integrale

$$\int_1^{+\infty} e^{\alpha x} \log x dx$$

A) converge se e solo se  $\alpha \geq 0$

B) diverge se e solo se  $\alpha \geq 0$

C) converge se e solo se  $\alpha \geq -1$

D) diverge se e solo se  $\alpha \geq -1$

E) nessuna delle altre possibilità è corretta

6. L'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y'' + 3y' = x$$

è

A)  $c_1 e^{-3x} + c_2 - \frac{x}{9} + \frac{x^2}{6}, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

B)  $c_1 \cos \sqrt{3}x + c_2 \sin \sqrt{3}x, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

C)  $c_1 e^{-3x} + c_2 x + \frac{x}{3}, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

D)  $c_1 \cos \sqrt{3}x + c_2 \sin \sqrt{3}x + x \cos \sqrt{3}x, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

E) nessuna delle altre possibilità è corretta

**NB:** con  $\log$  si indica il logaritmo in base  $e$ .

*Svolgimento.* 1) A) è corretta perché, in particolare,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \log x}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \log x = 0,$$

noto limite fondamentale. B) è sbagliata per la stessa ragione. C) è corretta perché, in particolare,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \log x}{x^{\frac{3}{2}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log x}{\sqrt{x}} = 0,$$

noto limite fondamentale. D) ed E) sono evidentemente sbagliate.

2) Si ha, per  $x \rightarrow 0$ ,

$$(\sin x)^2 - \arctan(x^2) = \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^2 - \left(x^2 - \frac{x^6}{3} + o(x^6)\right) = -\frac{x^4}{3} + o(x^4)$$

e

$$\cos(x) + \cosh(x) - 2 = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) - 2 = \frac{x^4}{12} + o(x^4),$$

per cui

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin^2 x - \arctan(x^2)}{\cos(x^2) + \cosh(x^2) - 2} = -4.$$

3) La funzione  $F(x) = \int_1^x \frac{\sinh t}{t} dt$  è strettamente crescente in  $]1, +\infty[$  perché  $F'(x) = \frac{\sinh x}{x} > 0$ , perciò ha al massimo uno zero. Ne ha almeno uno perché  $F(1) - 1 = -1 < 0$  e  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) - 1 = +\infty$ , dato che l'integrale  $\int_1^{+\infty} \frac{\sinh t}{t} dt$  è divergente.

4) Si tratta di un integrale immediato:

$$D \log(1 + e^x) = \frac{e^x}{1 + e^x}.$$

5) L'integrale

$$\int_1^{+\infty} e^{\alpha x} \log x dx$$

è convergente se e solo se  $\alpha < 0$ . Infatti, per  $\alpha < 0$  si ha  $e^{\alpha x} \log x = o(\frac{1}{x^2})$  per  $x \rightarrow +\infty$ , mentre per  $\alpha \geq 0$ ,  $e^{\alpha x} \log x \geq 1$  definitivamente per  $x \rightarrow +\infty$ .

6) L'equazione caratteristica è  $\lambda^2 + 3\lambda = 0$ . Siccome 0 è radice dell'equazione caratteristica, la soluzione particolare  $\varphi$  è del tipo  $x(a + bx)$ , con  $a, b$  da determinarsi. Imponendo che  $\varphi$  sia una soluzione, si ottiene  $\varphi''(x) + 3\varphi'(x) = 2b + 3(a + 2bx) = x$ , da cui  $6b = 1$ ,  $3a + 2b = 0$ . Quindi l'integrale generale è

$$c_1 e^{-3x} + c_2 - \frac{x}{9} + \frac{x^2}{6}.$$

### Risposte corrette

1	2	3	4	5	6
A, C	D	C	C	B	A