Ingegneria Meccanica, Canale 2

Prova scritta di Analisi Matematica 1

Padova, 18.2.2021

Prima parte

Tempo a disposizione: 60 minuti.

NB: Alcune domande possono avere più di una risposta esatta: in tal caso le risposte errate sono penalizzate.
Punteggio massimo 15 punti.

1. L'integrale

$$\int_{-2}^{2} \sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x$$

vale

A) π

B) 0

C) 4

D) 2π

E) nessuna delle altre possibilità è corretta

2. Sia

$$f(x) = 1 - (\cos x)^{\alpha} - \sin(x^2),$$

con $\alpha \in \mathbb{R}$. L'ordine di infinitesimo di f per $x \to 0$

A) è α per ogni α

B) è 2 per ogni $\alpha \neq 2$

C) è 4 per $\alpha = 2$

D) è 2 per ogni α

E) nessuna delle altre possibilità è corretta

3. La serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \log \frac{n^3+n+1}{n^3+1}$$

A) converge assolutamente

B) converge ma non converge assolutamente

C) converge assolutamente ma non converge

D) diverge

E) nessuna delle altre possibilità è corretta

4. L'integrale generalizzato

$$\int_2^{+\infty} x^\alpha \log x \sin \frac{1}{\log^2 x}\, \mathrm{d}x$$

A) converge per ogni $\alpha < 0$

B) converge per ogni α

C) converge per ogni $\alpha < -1$

D) converge per ogni $\alpha > 1$

E) nessuna delle altre possibilità è corretta

5. La funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cos \frac{1}{x} & \text{per } x \neq 0 \\ 0 & \text{per } x = 0 \end{cases}$$

A) è derivabile in 0

B) è continua in 0

C) non è derivabile in 0

D) non è continua in 0

E) è di classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$

6. L'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y'' - y' - 2y = x$$

è

A) $c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

B) $c_1 \cos(-x) + c_2 \sin(2x) + \frac{1}{4}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

C) $c_1 \cos(-x) + c_2 \sin(2x) - \frac{x}{2}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

D) $c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x} + \frac{1}{4} - \frac{x}{2}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

E) nessuna delle altre possibilità è corretta

NB: con log si indica il logaritmo in base e.

Svolgimento. 1) Calcoliamo l'integrale richiesto. Risulta

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x = &\ (\text{ponendo } x = 2\sin t) = 4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,\mathrm{d}t\\ &= 2\big[t + 2\sin t\cos t\big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 2\pi.\end{aligned}$$

2) Ricordando lo sviluppo di McLaurin di seno e coseno e che $(1+y)^\alpha = 1+\alpha y+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}y^2+o(y^2)$ per $y \to 0$, si ha, per $x \to 0$,

$$\begin{aligned}f(x) &= 1 - \Big(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\Big)^\alpha - x^2 + o(x^4)\\ &= 1 - \Big(1 - \frac{\alpha}{2}x^2 + \Big(\frac{\alpha(\alpha-1)}{8} + \frac{\alpha}{24}\Big)x^4\Big) - x^2 + o(x^4)\\ &= \Big(\frac{\alpha}{2} - 1\Big)x^2 + \Big(\frac{\alpha}{12} - \frac{\alpha^2}{8}\Big)x^4 + o(x^4).\end{aligned}$$

Pertanto, per $\alpha \neq 2$ la funzione f è infinitesima di ordine 2, mentre per $\alpha = 2$ la funzione f è infinitesima di ordine 4.

3) C) è evidentemente errata. Il termine generale della serie è infinitesimo per $n \to \infty$. Ne calcoliamo l'ordine con uno sviluppo. Risulta, per $n \to \infty$,

$$\log\frac{n^3+n+1}{n^3+1} = \log\Big(1 + \frac{n}{n^3+1}\Big) \sim \frac{n}{n^3+1} \sim \frac{1}{n^2}.$$

Pertanto la serie converge assolutamente, per confronto asintotico con la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} < +\infty$.

4) L'integrando $g(x)$ è continuo e > 0 in $[2, +\infty[$. Inoltre, per $x \to +\infty$,

$$g(x) \sim \frac{x^\alpha}{\log x}.$$

Pertanto l'integrale è convergente se e solo se $\int_2^{+\infty}\frac{x^\alpha}{\log x}\,\mathrm{d}x < +\infty$, cioè se e solo se $\alpha < -1$.

5) f è chiaramente derivabile infinite volte (e quindi continua) fuori dall'origine. Si ha evidentemente $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$, per cui f è continua in $x = 0$. Inoltre

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2\cos\frac{1}{x}}{x} = 0,$$

per cui f è derivabile in $x = 0$. Siccome

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{x\to 0}\Big(2x\cos\frac{1}{x} + \sin\frac{1}{x}\Big)$$

non esiste, f non è di classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.

6) L'equazione caratteristica è $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$, che ha come soluzioni $\lambda = -1, 2$. Siccome 0 non è soluzione, la soluzione particolare è del tipo $\bar{y}(x) = a + bx$. Imponendo che $\bar{y}$ sia una soluzione, risulta $\bar{y}(x) = \frac{1}{4} - \frac{x}{2}$. Quindi l'integrale generale è

$$c_1e^{-x} + c_2e^{2x} + \frac{1}{4} - \frac{x}{2},\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Risposte corrette

1	2	3	4	5	6
D	B,C	A	C	A,B	D