

Ingegneria Meccanica, Canale 2
Prova scritta di Analisi Matematica 1

Padova, 18.2.2021

Seconda parte

Tempo a disposizione: 75 minuti.

1) [9 punti] Data la funzione

$$f(x) = \log(6 - |x^3 + 2|),$$

- a) determinare il dominio D e studiare il segno di f ;
- b) determinare i limiti di f agli estremi di D ;
- c) studiare la derivabilità, calcolare la derivata e studiare la monotonia di f ; determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto; calcolare i limiti significativi di f' ;
- d) calcolare la derivata seconda e studiare la concavità e la convessità di f ;
- e) disegnare un grafico qualitativo di f .

2) [8 punti] Data l'equazione differenziale

$$y' = (y^2 - 2y + 5) \frac{1}{4x^2 - 1},$$

- a) dire se ammette soluzioni costanti ed in caso affermativo calcolarle;
- b) calcolare la soluzione che soddisfa la condizione $y(0) = 1$.

3) (**Facoltativo**) Sia

$$f(y) = \begin{cases} \frac{1-ey^2}{y} & \text{per } y \neq 0 \\ 0 & \text{per } y = 0. \end{cases}$$

- a) Si dimostri che f è di classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ (e pertanto per ogni $y_0 \in \mathbb{R}$ il problema di Cauchy $y' = f(y)$, $y(0) = y_0$ ha una ed una sola soluzione).
- b) Si dimostri** che, per ogni soluzione $y : [0, T[\rightarrow \mathbb{R}$ dell'equazione differenziale $y' = f(y)$, il limite $\lim_{x \rightarrow T^-} y(x)$ esiste finito.

NB: con \log si indica il logaritmo in base e .

È vietato tenere con sé, anche spenti, calcolatrici di qualsiasi tipo e usare libri o appunti. Ogni affermazione deve essere adeguatamente giustificata.

** difficile.