

## Ingegneria Meccanica, Canale 2

### Prova scritta di Analisi Matematica 1

Padova, 12.7.2021

#### Prima parte

Tempo a disposizione: 70 minuti.

**NB: Alcune domande possono avere più di una risposta esatta: in tal caso le risposte errate sono penalizzate.**

**Punteggio massimo: 16 punti.**

1. [4 punti] Una primitiva di

$$x^2 \log^2 x \quad (x > 0)$$

è

A)  $2x \left( \frac{\log^3 x}{3} + \frac{\log^4 x}{4} \right)$

B)  $\frac{x^3 \log^3 x}{3}$

C)  $\frac{x^3}{3} \log^2 x + \frac{2}{9} x^3 \log x - \frac{2}{27} x^3$

D)  $\frac{x^3}{3} \log^2 x - \frac{2}{9} x^3 \log x + \frac{2}{27} x^3$

E) nessuna delle altre possibilità è corretta

2. [2 punti] L'integrale

$$\int_0^1 x^2 \log^2 x \, dx$$

A) è convergente e vale  $\frac{2}{27}$

B) non è convergente

C) è convergente e vale 0

D) è convergente e vale  $-\frac{2}{27}$

E) nessuna delle altre possibilità è corretta

3. [3 punti] Lo sviluppo di Taylor per  $x \rightarrow 0^+$  di ordine 4 di

$$f(x) = \log(\cos x)$$

A) è  $-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$

B) è  $-\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^4)$

C) è  $-\frac{x^2}{2} + o(x^4)$

D) è  $-\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^4)$

E) nessuna delle altre possibilità è corretta

4. [3 punti] Il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log(\cos x) + \frac{1}{2} \sin(x^\alpha)}{x^2 \sinh x^2}$$

- A) è  $-\infty$  per ogni  $\alpha \in \mathbb{R}$
- B) è  $+\infty$  per ogni  $0 < \alpha < 2$  e  $-\infty$  per ogni  $\alpha > 2$
- C) è  $-\frac{1}{12}$  per  $\alpha = 2$
- D) è  $-\frac{1}{24}$  per  $\alpha = 2$
- E) è  $\frac{1}{24}$  per  $\alpha = 2$

5. [4 punti] L'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y'' - 2y' + 2y = \cos x$$

è

- A)  $c_1 e^x \cos x + c_2 e^x \sin x + \frac{1}{5} \cos x - \frac{2}{5} \sin x$ ,  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$
- B)  $c_1 e^{-x} \cos x + c_2 e^{-x} \sin x + \frac{2}{5} \cos x + \frac{1}{5} \sin x$ ,  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$
- C)  $c_1 e^x \cos x + c_2 e^x \sin x + \frac{1}{5} \cos x$ ,  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$
- D)  $c_1 e^x \cos \sqrt{2}x + c_2 e^{-x} \sin x + \frac{2}{5} \sin x$ ,  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$
- E) nessuna delle altre possibilità è corretta

**NB:** con  $\log$  si indica il logaritmo in base  $e$ .

*Svolgimento.*

1) Integrando due volte per parti, risulta

$$\begin{aligned}\int x^2 \log^2 x \, dx &= \frac{x^3}{3} \log^2 x - \frac{2}{3} \int x^2 \log x \, dx \\ &= \frac{x^3}{3} \log^2 x - \frac{2}{9} x^3 \log x + \frac{2}{9} \int x^2 \, dx \\ &= \frac{x^3}{3} \log^2 x - \frac{2}{9} x^3 \log x + \frac{2}{27} x^3 + c, \quad c \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

2) Usiamo la primitiva di  $x^2 \log^2 x$  calcolata nell'esercizio precedente. Risulta

$$\int_0^1 x^2 \log^2 x \, dx = \frac{x^3}{3} \log^2 x - \frac{2}{9} x^3 \log x + \frac{2}{27} x^3 \Big|_0^1 = \frac{2}{27} - \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{x^3}{3} \log^2 x - \frac{2}{9} x^3 \log x + \frac{2}{27} x^3 \right) = \frac{2}{27},$$

dove si è usato il limite fondamentale  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha |\log x|^\beta = 0$  per ogni  $\alpha > 0$  e per ogni  $\beta \in \mathbb{R}$ . Osserviamo che le risposte C) e D) potevano essere scartate immediatamente, perché l'integranda è positiva in  $]0, 1[$ .

3) Per  $x \rightarrow 0^+$ , si ha (ricordando che  $\log y = y - \frac{y^2}{2} + o(y^2)$ ,  $y \rightarrow 0^+$ )

$$\log \cos x = \log \left( 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) \right) = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{1}{2} \left( -\frac{x^2}{2} \right)^2 + o(x^4) = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^4).$$

4) Utilizzando lo sviluppo asintotico dell'esercizio precedente si ha

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log(\cos x) + \frac{1}{2} \sin(x^\alpha)}{x^2 \sinh x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^4) + \frac{1}{2} x^\alpha + o(x^\alpha)}{x^4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \begin{cases} (\alpha < 2) & \frac{\frac{1}{2} x^\alpha + o(x^\alpha)}{x^4} \\ (\alpha = 2) & \frac{-\frac{1}{12} x^4 + o(x^4)}{x^4} \\ (\alpha > 2) & \frac{-\frac{1}{2} x^2 + o(x^2)}{x^4} \end{cases} \\ &= \begin{cases} (\alpha < 2) & +\infty \\ (\alpha = 2) & -\frac{1}{12} \\ (\alpha > 2) & -\infty. \end{cases}\end{aligned}$$

5) L'equazione caratteristica è  $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$ , che ha come soluzioni  $\lambda = 1 \pm i$ . Siccome  $i$  non è soluzione, la soluzione particolare è del tipo  $\bar{y}(x) = a \cos x + b \sin x$ . Imponendo che  $\bar{y}$  sia una soluzione, risulta  $\bar{y}''(x) - 2\bar{y}'(x) + 2\bar{y}(x) = -\bar{y}(x) - a \sin x + b \cos x + 2\bar{y}(x) = (a - 2b) \cos x + (2a + b) \sin x = \cos x$ , da cui  $a = \frac{1}{5}$ ,  $b = -\frac{2}{5}$ . Quindi l'integrale generale è

$$c_1 e^x \cos x + c_2 e^x \sin x + \frac{1}{5} \cos x - \frac{2}{5} \sin x, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

### Risposte corrette

1	2	3	4	5
D	A	B	B,C	A