Ingegneria Meccanica, Canale 2

Prova scritta di Analisi Matematica 1

Padova, 6.9.2021

Prima parte

Tempo a disposizione: 70 minuti.

NB: Alcune domande possono avere più di una risposta esatta: in tal caso le risposte errate sono penalizzate.
Punteggio massimo: 16 punti.

1. [3 punti] La serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^{\alpha} \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

converge

A) se e solo se $\alpha < 0$

B) se e solo se $\alpha > 1$

C) se e solo se $\alpha > 0$

D) se e solo se $n > 1$

E) nessuna delle altre possibilità è corretta

2) [3 punti] L'integrale generalizzato

$$\int_0^1 x^{\alpha} \sin\sqrt{x}\,\mathrm{d}x$$

A) converge se e solo se $\alpha > \frac{1}{2}$

B) diverge per ogni $\alpha < 0$

C) converge se e solo se $\alpha > -1$

D) converge se e solo se $\alpha > -\frac{3}{2}$

E) nessuna delle altre possibilità è corretta

3. [3 punti] Lo sviluppo di Taylor per $x \to 0$ di ordine 4 di

$$f(x) = \cos(\sinh x)$$

A) è $-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$

B) è $1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + o(x^4)$

C) è $1 - \frac{x^2}{2} + o(x^4)$

D) è $1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$

E) nessuna delle altre possibilità è corretta

4. [4 punti] Il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos\sinh x - e^{\alpha x^2}}{\sin\frac{x^2}{2} + \log(1+\alpha x^2)}$$

A) è $-\infty$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$

B) è $-\frac{1}{3}$ se $\alpha = -\frac{1}{2}$

C) è -1 per $\alpha \neq -\frac{1}{2}$

D) è 2 se $\alpha = -\frac{1}{2}$

E) è $+\infty$ per $\alpha \neq -\frac{1}{2}$

5. [3 punti] L'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y'' - 3y' + 2y = e^x$$

è

A) $c_1 e^x \cos x + c_2 e^x \sin x + x e^x,\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

B) $c_1 e^{-x} \cos x + c_2 e^{-x} \sin x + e^x \cos x + e^{-x} \sin x,\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

C) $c_1 e^x + c_2 e^{2x} + e^x,\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

D) $c_1 e^x + c_2 e^{2x} - x e^x,\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

E) nessuna delle altre possibilità è corretta

NB: con log si indica il logaritmo in base e.

Svolgimento.

1) Per $n \to +\infty$, il termine generale della serie è asintotico a $n^{\alpha-1}$, per cui la serie converge se e solo se $\alpha - 1 < -1$, cioè se e solo se $\alpha < 0$.

2) L'integranda è continua in $]0,1]$ e, per $x \to 0^+$, è asintotica a $x^{\alpha+\frac{1}{2}}$, per cui l'integrale converge se e solo se $\alpha + \frac{1}{2} > -1$, cioè se e solo se $\alpha > -\frac{3}{2}$.

3) Per $x \to 0$, si ha (ricordando che $\cos y = 1 - \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{24} + o(y^4)$, $y \to 0$, e $\sinh x = x + \frac{x^3}{6} + o(x^4)$)

$$\begin{aligned}
\cos\sinh x &= 1 - \frac{1}{2}\sinh^2 x + \frac{1}{24}\sinh^4 x + o(x^4) \\
&= 1 - \frac{1}{2}\Big(x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\Big)^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4) \\
&= 1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) \\
&= 1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + o(x^4).
\end{aligned}$$

4) Utilizzando lo sviluppo asintotico dell'esercizio precedente si ha

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\cos\sinh x - e^{\alpha x^2}}{\sin\frac{x^2}{2} + \log(1+\alpha x^2)} &= \lim_{x\to 0} \frac{1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} - 1 - \alpha x^2 - \frac{\alpha^2}{2}x^4 + o(x^4)}{\frac{x^2}{2} + \alpha x^2 - \frac{1}{2}(\alpha x^2)^2 + o(x^4)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{-(\alpha + \frac{1}{2})x^2 - (\frac{1}{8} + \frac{\alpha^2}{2})x^4 + o(x^4)}{(\frac{1}{2} + \alpha)x^2 - \frac{1}{2}\alpha^2 x^4 + o(x^4)} \\
&= \begin{cases} (\alpha \neq -\frac{1}{2}) & -1 \\ (\alpha = -\frac{1}{2}) & 2. \end{cases}
\end{aligned}$$

5) L'equazione caratteristica è $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$, che ha come soluzioni $\lambda = 1, 2$. Siccome 1 è una radice del polinomio caratteristico, la soluzione particolare dell'equazione differenziale si può trovare nella forma $\bar{y}(x) = axe^x$. Imponendo che $\bar{y}$ sia una soluzione, risulta, svolgendo i calcoli, $\bar{y}''(x) - 3\bar{y}'(x) + 2\bar{y}(x) = 2ae^x + axe^x - 3(ae^x + axe^x) + 2axe^x = -ae^x = e^x$, da cui $a = -1$. Quindi l'integrale generale è

$$c_1 e^x + c_2 e^{2x} - xe^x,\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Risposte corrette

1	2	3	4	5
A	D	B	C, D	D