Ingegneria Meccanica, Canale 2

Prova scritta di Analisi Matematica 1

Padova, 25.1.2021

Seconda parte

1) Data la funzione

$$f(x) = \log^2|x-1| - 3\log|x-1|,$$

a) determinare il dominio D, trovare la simmetria e studiare il segno di f;

b) determinare i limiti di f agli estremi di D e gli eventuali asintoti;

c) calcolare la derivata e studiare la monotonia di f; determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto;

d) calcolare la derivata seconda e studiare la concavità e la convessità di f;

e) disegnare un grafico qualitativo di f.

Svolgimento. a) $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Il grafico di f è simmetrico rispetto alla retta $x = 1$, per cui studiamo le funzione per $x > 1$ e poi riportiamo per simmetria quanto trovato. Per $x > 1$, $f(x) > 0$ se e solo se $1 < x < 2$ o $x > 1 + e^3$.
b) $\lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \log(x-1)\big(\log(x-1) - 3\big) = +\infty$. Non ci sono asintoti obliqui perché $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$.
c) f è evidentemente derivabile nel suo dominio e, per $x > 1$, si ha

$$f'(x) = 2\frac{\log(x-1)}{x-1} - \frac{3}{x-1} = \frac{2\log(x-1) - 3}{x-1}.$$

Il segno di $f'(x)$ è positivo se e solo se $x > 1 + e^{\frac{3}{2}}$, per cui $1 + e^{\frac{3}{2}}$ è il punto di minimo assoluto, con $f(1 + e^{\frac{3}{2}}) = -\frac{9}{4}$.
d) Per $x > 1$, $f''(x) = \frac{2-2\log(x-1)+3}{(x-1)^2} = \frac{5-2\log(x-1)}{(x-1)^2}$, che è > 0 se e solo se $1 < x < 1 + e^{\frac{5}{2}}$, intervallo nel quale f è convessa. Pertanto $1 + e^{\frac{5}{2}}$ è un punto di flesso.
e) Il grafico di f è in figura 1.

2) Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2(x-2)^n}{(-3n)^3 + \sqrt{n}}$$

al variare di $x \in \mathbb{R}$.
Svolgimento. Studiamo prima la convergenza assoluta, usando il criterio asintotico del rapporto. Si ha:

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^2|(x-2)^{n+1}|}{|(-3(n+1))^3 + \sqrt{n+1}|} \frac{|(-3n)^3 + \sqrt{n}|}{n^2|(x-2)^n|} \\
&\quad = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^2|(x-2)^{n+1}|}{n^2|(x-2)^n|} \frac{|(-3n)^3 + \sqrt{n}|}{|(-3(n+1))^3 + \sqrt{n+1}|}.
\end{aligned}$$

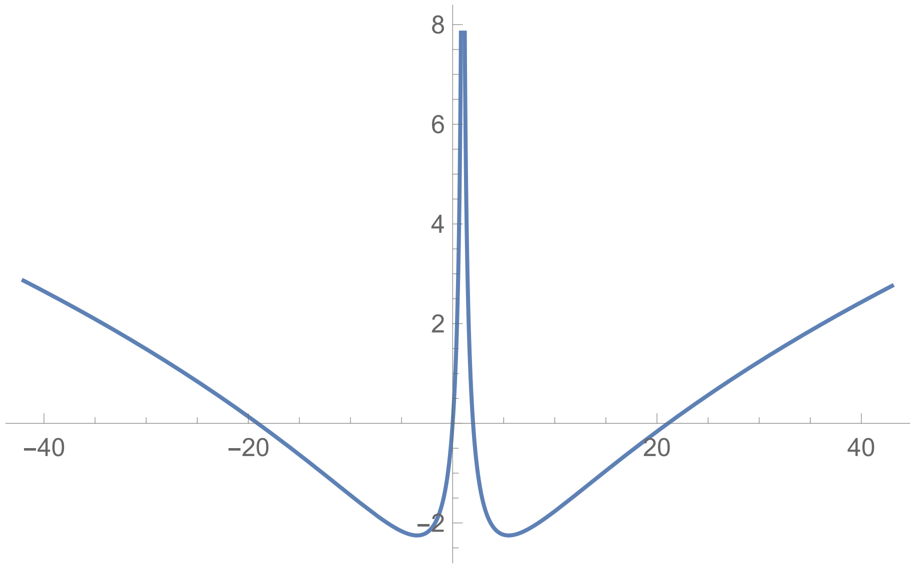

Figura 1: Il grafico di f.

Siccome

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|(-3n)^3+\sqrt{n}|}{|(-3(n+1))^3+\sqrt{n+1}|} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^3}{(n+1)^3} = 1,$$

risulta

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^2|(x-2)^{n+1}|}{|(-3(n+1))^3+\sqrt{n+1}|}\,\frac{|(-3n)^3+\sqrt{n}|}{n^2|(x-2)^n|} = |x-2|.$$

Quindi, se $1 < x < 3$ la serie converge assolutamente e perciò converge, mentre per $x < 1$ oppure per $x > 3$ la serie diverge assolutamente e non converge perché il termine generale non è infinitesimo (per $x > 3$ diverge perché i termini sono positivi). Restano da studiare i casi $x = 1$ e $x = 3$, nei quali il criterio asintotico del rapporto non dà informazioni. Per $x = 1$, il termine generale della serie diventa

$$\frac{(-1)^n n^2}{-27n^3+\sqrt{n}} = -(-1)^n \frac{n^2}{27n^3-\sqrt{n}},$$

che ha segno alterno. Il suo valore assoluto è

$$\frac{n^2}{27n^3-\sqrt{n}} \sim \frac{1}{27n}.$$

La serie quindi diverge assolutamente. Per applicare il criterio di Leibniz dobbiamo verificare che il termine generale in valore assoluto sia decrescente, definitivamente per $n \to +\infty$. Ponendo

$$f(x) = \frac{x^2}{27x^3-\sqrt{x}} \quad \text{per } x > 0,$$

si ha

$$f'(x) = \frac{2x(27x^3-\sqrt{x}) - x^2\left(81x^2 - \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{(27x^3-\sqrt{x})^2} = \frac{-54x^4-3x}{2(27x^3-\sqrt{x})^2},$$

che appunto è negativo. Per $x = 3$, il termine generale della serie diventa $\frac{n^2}{-27n^3+\sqrt{n}}$, che ha segno costante (negativo) ed è asintotico a $-\frac{1}{27n}$. La serie quindi diverge a $-\infty$.

3) **(Facoltativo)** Per $x > 0$ si consideri la funzione

$$F(x) = \int_1^x t^\alpha\big(1 + \sin(\sqrt{t})\big)\,\mathrm{d}t.$$

a) Si determinino gli $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui $F(x)$ può essere prolungata con continuità (da destra) in $x = 0$.

b) Per $\alpha = -\frac{3}{2}$ e per $\alpha = -\frac{1}{2}$** si dica se il limite $\lim_{x\to+\infty} F(x)$ esiste e se è finito oppure non lo è.

Svolgimento. a) Ponendo $f(t) = t^\alpha\big(1 + \sin(\sqrt{t})\big)$, risulta che f è continua e ≥ 0 in $]0, +\infty[$ e $f(t) \sim t^\alpha$ per $t \to 0^+$. Pertanto f è integrabile in senso generalizzato in $[0, 1]$, cioè il $\lim_{x\to0^+} F(x)$ esiste finito, cioè F è prolungabile con continuità in 0, se e solo se $\alpha > -1$.
b) Sia $\alpha = -\frac{3}{2}$. Allora $0 \leq f(t) \leq 2t^{-\frac{3}{2}}$, che è integrabile in senso generalizzato in $]1, +\infty[$. Pertanto il $\lim_{t\to+\infty} F(x)$ esiste finito. Sia ora $\alpha = -\frac{1}{2}$. Con la sostituzione $t = s^2$ risulta

$$F(x) = \int_1^x \frac{1 + \sin\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = \int_1^{\sqrt{x}} s\,\frac{1 + \sin s}{s}\,\mathrm{d}s = \sqrt{x} - 1 - \cos\sqrt{x} + \cos 1 \to +\infty$$

per $x \to +\infty$.