

## Ingegneria Meccanica, Canale 2

### Prova scritta di Analisi Matematica 1

Padova, 18.2.2021

### Seconda parte

**Tempo a disposizione: 75 minuti.**

1) Data la funzione

$$f(x) = \log(6 - |x^3 + 2|),$$

- determinare il dominio  $D$  e studiare il segno di  $f$ ;
- determinare i limiti di  $f$  agli estremi di  $D$ ;
- studiare la derivabilità, calcolare la derivata e studiare la monotonia di  $f$ ; determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto; calcolare i limiti significativi di  $f'$ ;
- calcolare la derivata seconda e studiare la concavità e la convessità di  $f$ ;
- disegnare un grafico qualitativo di  $f$ .

*Svolgimento.* a)  $D = \{x \in \mathbb{R} : |x^3 + 2| < 6\} = \{x \in \mathbb{R} : -2 < x < \sqrt[3]{4}\}$  e  $f(x) \geq 0$  se e solo se  $6 - |x^3 + 2| > 1$ , cioè se e solo se  $-\sqrt[3]{7} < x < \sqrt[3]{3}$ .

b)  $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \sqrt[3]{4}^-} f(x) = -\infty$ .

c)  $f$  è derivabile in tutti i punti di  $D$  nei quali si possono applicare le regole di derivazione, cioè dove l'argomento del modulo è diverso da zero. Quindi  $f$  è derivabile se e solo se  $x \in D$ ,  $x \neq -\sqrt[3]{2}$ . Si ha

$$f(x) = \begin{cases} \log(8 + x^3) & \text{se } -2 < x < -\sqrt[3]{2} \\ \log(4 - x^3) & \text{se } -\sqrt[3]{2} \leq x < \sqrt[3]{4}, \end{cases}$$

per cui

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{3x^2}{8+x^3} & \text{se } -2 < x < -\sqrt[3]{2} \\ \frac{-3x^2}{4-x^3} & \text{se } -\sqrt[3]{2} < x < \sqrt[3]{4}. \end{cases}$$

Di conseguenza  $f$  è strettamente crescente in  $] -2, -\sqrt[3]{2}[$  e strettamente decrescente in  $] -\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4}[$ . Quindi  $-\sqrt[3]{2}$  è il punto di massimo assoluto. Si tratta inoltre di un punto angoloso, perché  $\lim_{x \rightarrow -\sqrt[3]{2}^-} f'(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} = -\lim_{x \rightarrow -\sqrt[3]{2}^+} f'(x)$ .

d) Si ha

$$f''(x) = \begin{cases} \frac{6x(8+x^3)-3x^2 \cdot 3x^2}{(8+x^3)^2} = \frac{48x-3x^4}{(8+x^3)^2} = \frac{3x(16-x^3)}{(8+x^3)^2} & \text{se } -2 < x < -\sqrt[3]{2} \\ \frac{-6x(4-x^3)-3x^2 \cdot 3x^2}{(4-x^3)^2} = \frac{-24x-3x^4}{(4-x^3)^2} = \frac{-3x(x^3+8)}{(4-x^3)^2} & \text{se } -\sqrt[3]{2} < x < \sqrt[3]{4}. \end{cases}$$

Di conseguenza  $f$  è concava in  $] -2, -\sqrt[3]{2}[$  e in  $]0, \sqrt[3]{4}[$ . Perciò 0 è un punto di flesso (a tangente orizzontale).

e) Il grafico di  $f$  è in figura 1.

2) [8 punti] Data l'equazione differenziale

$$y' = (y^2 - 2y + 5) \frac{1}{4x^2 - 1},$$

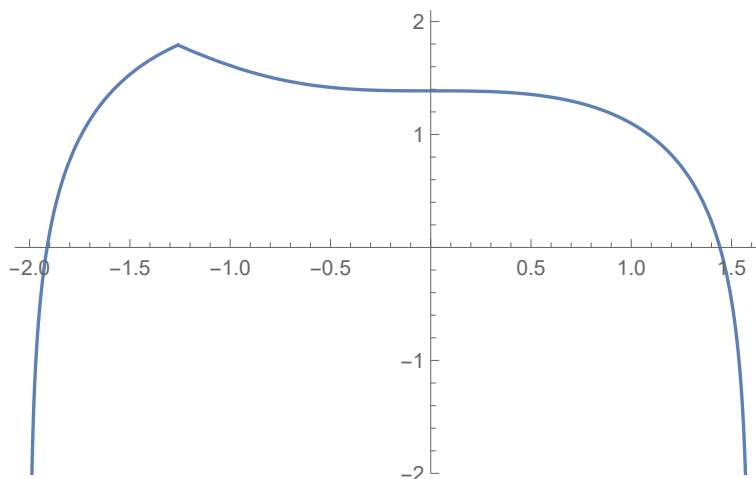


Figura 1: Il grafico di  $f$ .

- a) dire se ammette soluzioni costanti ed in caso affermativo calcolarle;  
 b) calcolare la soluzione che soddisfa la condizione  $y(0) = 1$ .

*Svolgimento.* a) Le soluzioni costanti sono date dai valori di  $y$  per i quali il secondo membro è nullo per ogni  $x$  nel suo dominio: siccome  $y^2 - 2y + 5 > 0$  per ogni  $y$ , non ci sono soluzioni costanti.

b) Le soluzioni non nulle si trovano mediante

$$\int \frac{dy}{y^2 - 2y + 5} = \int_0^x \frac{1}{4t^2 - 1} dt.$$

Per calcolare l'integrale al secondo membro eseguiamo la decomposizione in somma dell'integrando:

$$\frac{t}{4t^2 - 1} = \frac{A}{2t - 1} - \frac{B}{2t + 1}.$$

Si ha perciò  $A = -B = \frac{1}{2}$ . Quindi

$$\int_0^x \frac{1}{4t^2 - 1} dt = \frac{1}{2} \log \left| \frac{2x - 1}{2x + 1} \right| = (\text{per } |x| < 1/2) = \frac{1}{2} \log \frac{1 - 2x}{2x + 1}.$$

Per calcolare l'integrale al primo membro, scriviamo l'integrando come

$$\frac{1}{y^2 - 2y + 5} = \frac{1}{(y - 1)^2 + 4},$$

per cui

$$\int \frac{dy}{y^2 - 2y + 5} = \frac{1}{4} \int \frac{dy}{\left(\frac{y-1}{2}\right)^2 + 1} = \frac{1}{2} \arctan \frac{y-1}{2} + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Imponendo la condizione iniziale, risulta  $c = 0$ . Si ha perciò

$$y(x) = 1 + 2 \tan \log \frac{1 - 2x}{1 + 2x}.$$

3) (Facoltativo) Sia

$$f(y) = \begin{cases} \frac{1 - e^{y^2}}{y} & \text{per } y \neq 0 \\ 0 & \text{per } y = 0. \end{cases}$$

a) Si dimostri che  $f$  è di classe  $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$  (e pertanto per ogni  $y_0 \in \mathbb{R}$  il problema di Cauchy  $y' = f(y)$ ,  $y(0) = y_0$  ha una ed una sola soluzione).

b) Si dimostri che, per ogni soluzione  $y : [0, T[ \rightarrow \mathbb{R}$  dell'equazione differenziale  $y' = f(y)$ , il limite  $\lim_{x \rightarrow T^-} y(x)$  esiste finito.

*Svolgimento.* a)  $\lim_{y \rightarrow 0} f(y) = 0$  e  $\lim_{y \rightarrow 0} f'(y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2y^2 e^{y^2} - 1 + e^{y^2}}{y^2} = -1$ , per cui  $f$  è di classe  $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ . Dalla teoria svolta a lezione sappiamo allora che per ogni  $y_0 \in \mathbb{R}$  il problema di Cauchy  $y' = f(y)$ ,  $y(0) = y_0$  ha una ed una sola soluzione.

b) Se  $y_0 = 0$ , l'unica soluzione del problema di Cauchy  $y' = f(y)$  con  $y(0) = 0$  è  $y \equiv 0$ . Ogni soluzione con condizione iniziale diversa da 0 non può annullarsi mai, altrimenti verrebbe violata l'unicità, quindi tutte le soluzioni non nulle hanno segno costante. Siccome  $f(y) < 0$  per ogni  $y > 0$  e  $f(y) > 0$  per ogni  $y < 0$ , tutte le soluzioni non nulle sono strettamente monotone e limitate in  $[0, T[$  e quindi ammettono limite finito  $L$ .

Osserviamo (non richiesto) che in realtà tutte le soluzioni sono definite in una semiretta superiormente illimitata e che  $L = 0$ . Infatti supponiamo per assurdo che esista una soluzione  $y$  tale che l'estremo superiore del suo insieme di definizione sia  $T < +\infty$  e poniamo  $\bar{y} = \lim_{t \rightarrow T^-} y(x)$ . Risolvendo il problema di Cauchy  $y' = f(y)$ ,  $y(0) = \bar{y}$  si trova una soluzione definita in un intervallo con estremo superiore  $> T$ , il che è assurdo. Siccome  $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = L \in \mathbb{R}$ , si ha che  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (y(2x) - y(x)) = 0$ . Per il teorema di Lagrange, per ogni  $x$  esiste  $t_x \in ]x, 2x[$  tale che  $y(2x) - y(x) = xy'(t_x) = x \frac{1 - e^{y(t_x)^2}}{y(t_x)}$ . Siccome  $x \rightarrow +\infty$ , necessariamente  $y'(t_x) = \frac{1 - e^{y(t_x)^2}}{y(t_x)} \rightarrow 0$ . Siccome si ha anche  $\frac{1 - e^{y(t_x)^2}}{y(t_x)} \rightarrow f(L)$ , risulta che  $f(L) = 0$ , cioè  $L = 0$ .