Ingegneria Meccanica, Canale 2

Prova scritta di Analisi Matematica 1

Padova, 12.7.2021

Seconda parte

1) Data la funzione

$$f(x) = \left|\log\left(2e^{2x} - 3e^x - 2\right)\right|,$$

a) determinarne il dominio D;

b) determinare i limiti di f agli estremi di D e gli eventuali asintoti;

c) studiare la derivabilità, calcolare la derivata e studiare la monotonia di f; determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto; discutere la presenza di punti angolosi nel grafico di f;

d) calcolare la derivata seconda e studiare la concavità e la convessità di f;

e) disegnare un grafico qualitativo di f.

Svolgimento. a) Il dominio è dato dagli $x \in \mathbb{R}$ per i quali $2e^{2x} - 5e^x - 2 > 0$. Le radici del polinomio $2y^2 - 3y - 2$ sono $y = -\frac{1}{2}$, $y = 2$, per cui $2e^{2x} - 5e^x - 2 > 0$ se e solo se $x > \log 2$, cioè $D =]\log 2, +\infty[$.
b) $\lim_{x\to\log 2} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, per cui $x = \log 2$ è un asintoto verticale. Per determinare l'eventuale asintoto obliquo, calcoliamo

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x + \log\left(2 - 3e^{-x} - 2e^{-2x}\right)}{x} = 2$$

e

$$\lim_{x\to+\infty} \left(f(x) - 2x\right) = \lim_{x\to+\infty} \log\left(2 - 3e^{-x} - 2e^{-2x}\right) = \log 2.$$

Quindi la retta $y = 2x + \log 2$ è l'asintoto obliquo per $x \to +\infty$.
c) f è sicuramente derivabile dove l'argomento del modulo non si annulla, perché si possono applicare le regole di derivazione. L'argomento del modulo si annulla per x soluzione dell'equazione $2e^{2x} - 5e^x - 2 = 1$, cioè per $x = x_0 := \log \frac{3+\sqrt{33}}{4}$. Si ha

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{4e^{2x} - 3e^x}{2e^{2x} - 3e^x - 2} & \text{per } x > x_0 \\ -\dfrac{4e^{2x} - 3e^x}{2e^{2x} - 3e^x - 2} & \text{per } \log 2 < x < x_0. \end{cases}$$

Ovviamente x_0 è il punto di minimo assoluto e si ha $f'(x) < 0$ per $\log 2 < x < x_0$, $f'(x) > 0$ per $x > x_0$, per cui non ci sono altri punti di estremo. Si ha inoltre

$$\lim_{x\to x_0^+} f'(x) = 4e^{2x_0} - 3e^{x_0} = -\lim_{x\to x_0^-} f'(x),$$

per cui x_0 è un punto angoloso.
d) Si ha

$$f''(x) = \begin{cases} -2e^x \dfrac{-3 + 8e^x + 3e^{2x}}{(2e^{2x} - 3e^x + 2)^2} & \text{per } x > x_0 \\ 2e^x \dfrac{-3 + 8e^x + 3e^{2x}}{(2e^{2x} - 3e^x + 2)^2} & \text{per } \log 2 < x < x_0. \end{cases}$$

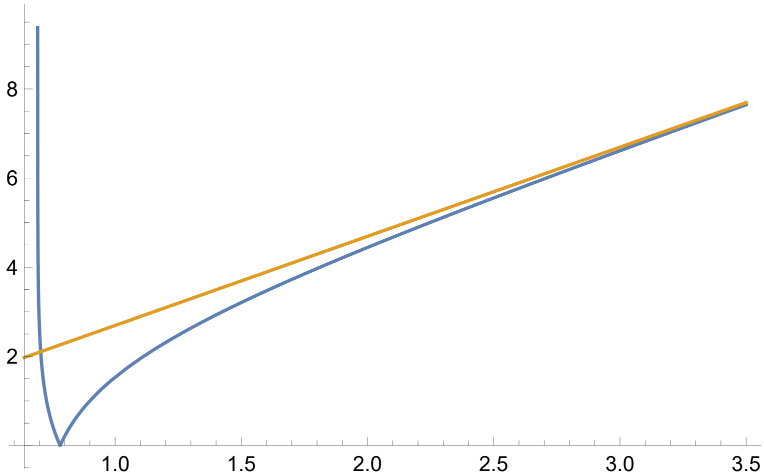

Figura 1: Il grafico di f.

L'espressione $-3+8e^x+3e^{2x}$ è >0 per $x>\log\frac{1}{3}$, per cui in $]x_0,+\infty[$ la funzione risulta concava, mentre per $\log 2<x<x_0$ è convessa.
e) Il grafico di f è in figura 1.

2) [7 punti] Studiare la convergenza assoluta e la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{n^2}{n^\alpha+\sqrt{n}}$$

al variare di $\alpha\in\mathbb{R}$.
Svolgimento. Se $\alpha<\frac{1}{2}$, per $n\to\infty$ il denominatore del termine generale della serie è asintotico a $\sqrt{n}$, per cui

$$\frac{n^2}{n^\alpha+\sqrt{n}}\sim n^{\frac{3}{2}},$$

per cui la serie diverge assolutamente e non converge perché il termine generale non è infinitesimo. Per $\alpha=\frac{1}{2}$,

$$\frac{n^2}{n^\alpha+\sqrt{n}}\sim\frac{n^{\frac{3}{2}}}{2},$$

per cui il comportamento della serie è lo stesso. Per $\alpha>\frac{1}{2}$, il denominatore è asintotico a n^α. Quindi

$$\frac{n^2}{n^\alpha+\sqrt{n}}\sim n^{2-\alpha},$$

per cui la serie converge assolutamente, ed in tal caso converge, se e solo se

$$\alpha>3.$$

Il termine generale della serie è infinitesimo se e solo se $\alpha>2$, per cui se $\frac{1}{2}<\alpha\le 2$ la serie non converge perché il termine generale non è infinitesimo. Per $2<\alpha\le 3$ la serie, come si diceva, diverge assolutamente ma potrebbe convergere. Le ipotesi del criterio di Leibniz sono soddisfatte se

$$\frac{n^2}{n^\alpha+\sqrt{n}}$$

è decrescente. Posto $f(x) = \frac{x^2}{x^\alpha + \sqrt{x}}$, si ha

$$f'(x) = \frac{2x(x^\alpha + \sqrt{x}) - x^2\big(\alpha x^{\alpha-1} + \frac{1}{2\sqrt{x}}\big)}{(x^\alpha + \sqrt{x})^2} = \frac{(2-\alpha)x^{\alpha+1} + \frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x}(x^\alpha + \sqrt{x})^2},$$

che è < 0 definitivamente per $n \to \infty$, dato che $\alpha > 2$. La serie quindi, per $2 < \alpha \leq 3$, converge per il criterio di Leibniz.