Ingegneria Meccanica, Canale 2

Prova scritta di Analisi Matematica 1

Padova, 6.9.2021

Svolgimento della seconda parte

1) Data la funzione

$$f(x) = \arcsin \frac{|x^2 + x - 2|}{4},$$

a) determinarne il dominio D;

b) studiare la derivabilità, calcolare la derivata e studiare la monotonia di f e determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto;

c) discutere l'eventuale presenza di punti angolosi o a tangente verticale nel grafico di f;

d) disegnare un grafico qualitativo di f.

Svolgimento. a) Il dominio è dato dalla condizione

$$\frac{|x^2 + x - 2|}{4} \leq 1,$$

cioè da

$$-4 \leq x^2 + x - 2 \leq 4.$$

La disequazione $x^2 + x - 2 \geq -4$ è sempre verificata, mentre la disequazione $x^2 + x - 2 \leq 4$ ha per soluzioni $-3 \leq x \leq 2$, per cui $D = [-3, 2]$.

b) La funzione è sicuramente derivabile dove l'argomento del modulo non si annulla (cioè per x tale che $x^2 + x - 2 \neq 0$, cioè per $x \neq -2, 1$) e dove l'argomento dell'arcoseno è diverso da ± 1 (cioè per $|x^2 + x - 2| \neq 4$, quindi per $x \neq -3, 2$). Osservando che l'argomento del modulo è negativo nell'intervallo $]-2, 1[$, si ha

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{2x+1}{4\sqrt{1 - \frac{(x^2+x-2)^2}{16}}} & \text{per } -3 < x < -2 \text{ oppure } 1 < x < 2, \\[2ex] -\dfrac{2x+1}{4\sqrt{1 - \frac{(x^2+x-2)^2}{16}}} & \text{per } -2 < x < 1. \end{cases}$$

Risulta perciò che $f'(x) < 0$ per $-3 < x < -2$ e per $-\frac{1}{2} < x < 1$, mentre $f'(x) > 0$ per $-2 < x < -\frac{1}{2}$ e per $-1 < x < 2$. Quindi (ovviamente) -2 e 1 sono i punti di minimo assoluto, dove f vale 0, e -3 e 2 sono i punti di massimo assoluto, dove f vale $\frac{\pi}{2}$, mentre $-\frac{1}{2}$ è un punto di massimo relativo, dove f vale $\arcsin \frac{9}{16}$.

c) Studiamo i limiti notevoli di f'. Si ha

$$\lim_{x\to -3} f'(x) = -\infty$$
$$\lim_{x\to 2} f'(x) = +\infty$$
$$\lim_{x\to -2^-} f'(x) = -\frac{3}{4}$$
$$\lim_{x\to -2^+} f'(x) = \frac{3}{4}$$
$$\lim_{x\to 1^-} f'(x) = -\frac{3}{4}$$
$$\lim_{x\to 1^+} f'(x) = \frac{3}{4}.$$

Pertanto nei punti $-3, 2$ il grafico ha tangente verticale, mentre i punti $-2, 1$ sono punti angolosi.

d) Il grafico di f è in figura 1.

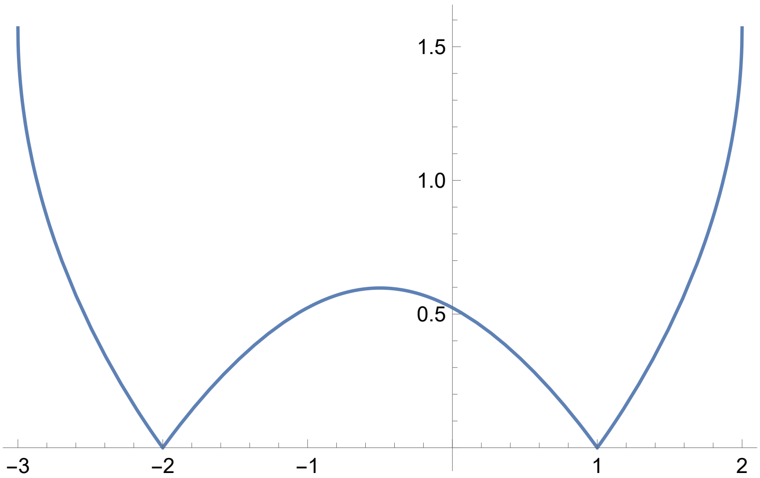

Figura 1: Il grafico di f.

2) Data l'equazione differenziale

$$y' = \frac{e^{4y}+1}{e^{2y}} \frac{1}{x(1+\sqrt[3]{x})},$$

a) determinarne le eventuali soluzioni costanti;

b) determinare la soluzione $\bar{y}$ tale che $\bar{y}(1) = 0$.

Svolgimento. L'equazione è a variabili separabili e non ha soluzioni costanti perché $\frac{e^{4y}+1}{e^{2y}}$ non si annulla mai. Per risolverla bisogna per prima cosa calcolare i due integrali

$$\int \frac{e^{2y}}{e^{4y}+1}\,\mathrm{d}y$$

e

$$\int \frac{1}{x(1+\sqrt[3]{x})}\,\mathrm{d}x.$$

Il primo è un integrale immediato:

$$\int \frac{e^{2y}}{e^{4y}+1}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\arctan e^{2y} + c,\ c \in \mathbb{R}.$$

Il secondo si calcola con la sostituzione $x = t^3$:

$$\int \frac{1}{x(1+\sqrt[3]{x})}\,\mathrm{d}x = 3\int \frac{t^2}{t^3(1+t)}\,\mathrm{d}t = 3\int \frac{\mathrm{d}t}{t(1+t)}.$$

Scomponendo in fratti semplici risulta

$$\int \frac{\mathrm{d}t}{t(1+t)} = \int \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{1+t}\right)\mathrm{d}t = \log\left|\frac{t}{1+t}\right| + c,\ c \in \mathbb{R}.$$

Risulta perciò

$$\int \frac{1}{x(1+\sqrt[3]{x})}\,\mathrm{d}x = 3\log\left|\frac{\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}\right| + c,\ c \in \mathbb{R}.$$

Siccome l'istante iniziale è $x = 1$, l'integrale generale si trova risolvendo l'equazione

$$\frac{1}{2}\arctan e^{2y} = 3\log\frac{\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[3]{x}} + c,$$

cioè

$$y(x) = \frac{1}{2}\log\left(\tan 6\log\frac{\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[3]{x}} + c\right).$$

La soluzione richiesta si trova ponendo $c = 1 + \tan 6\log 2$.

NB: con log si indica il logaritmo in base e.