Analisi matematica 1, Ingegneria Meccanica
Esercizi in preparazione della prova scritta, a cura di G. Colombo

## Indice



**NOTA: sia** $\ln$ **che** $\log$ **indicano il logaritmo in base** $e$**.**

**Buon lavoro!**

## 1 Primi esercizi di allenamento per la prova scritta

*Traccia 1*

1) Sia

$$f(x) = \frac{|x-1|-2}{x^2+1}, \quad x \in [-2, 4].$$

Studiarne il segno, la derivabilità, la monotonia e i massimi e minimi locali e assoluti.

2) Calcolare

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x^3}{x(1-\cos x)+x^4}.$$

3) Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + y = x \\ y(0) = y'(0) = 0. \end{cases}$$

4) (a) Calcolare

$$\int_0^{\frac{\pi^2}{4}} \sqrt{x} \sin \sqrt{x} dx.$$

(b*) Determinare per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ il seguente integrale converge:

$$\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} x^\alpha \sin \sqrt{x} dx.$$

5*) Discutere, al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log \left( n\left(e^{\frac{1}{n}} - 1\right) - \frac{\alpha}{n} \right).$$

---

Tempo a disposizione: 2 ore e 30 minuti. **Si consiglia di svolgere per primi gli esercizi senza l'asterisco.**

Ogni affermazione deve essere adeguatamente giustificata.

## *Traccia 2*

1) Sia
$$f(x) = \log(|x-1|+1) - \log x, \quad x \in ]0,2].$$
Semplificarla e studiarne la derivabilità, la monotonia e i massimi e minimi locali e assoluti.

2) Calcolare
$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x^2}{x(x-\sin x)+x^3\sin^2 x.}$$

3) Risolvere il problema di Cauchy
$$\begin{cases} y''+y'+y=\sin x \\ y(0)=0 \\ y'(0)=1. \end{cases}$$

4) (a) Calcolare
$$\int_{\log\pi}^{2\log\pi} e^{2x}\cos e^x\,dx.$$
(b*) Studiare la convergenza dell'integrale generalizzato
$$\int_{-\infty}^{\log\pi} e^{\alpha x}\cos e^x dx$$
al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

5*) Sia
$$f(x) = \int_0^x \sin(t^2)\,dt.$$
(a) Calcolare lo sviluppo di Taylor di $f$ di ordine 2 nel punto $x_0 = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ $\big($lasciando indicato il valore di $f(\sqrt{\frac{\pi}{2}})\big)$;
(b) studiare la monotonia e la convessità e la concavità di $f$ nell'intervallo $[-1,2]$;
(c) calcolare, al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$, il numero delle soluzioni dell'equazione $f(x)=\lambda$ contenute nell'intervallo $[-1,2]$.

---

Tempo a disposizione: 2 ore e 30 minuti. **Si consiglia di svolgere per primi gli esercizi senza l'asterisco.**

Ogni affermazione deve essere adeguatamente giustificata.

## *Traccia 3*

1) Sia
$$f(x) = \arctan|x^2 - 1|, \quad x \in [-1, 2].$$
Studiarne la derivabilità, la monotonia e i massimi e minimi locali e assoluti.

2) Calcolare
$$\lim_{x\to 0} \frac{(1-\cosh x)^2}{\sin x(x - \arctan x) + x^3 \sinh^2 x.}$$
3) Risolvere il problema di Cauchy, specificando l'intervallo massimale di esistenza della soluzione,
$$\begin{cases} y' = y(y+3) \\ y(0) = -6. \end{cases}$$

4) (a) Calcolare
$$\int_{\log 3}^{1} \frac{e^x}{e^{2x} - 3e^x + 2}\, dx.$$
(b*) Studiare la convergenza dell'integrale generalizzato
$$\int_{\log 2}^{+\infty} \frac{e^x}{(e^{2x} - 3e^x + 2)^\alpha}\, dx$$
al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

5*) Sia
$$f(x) = \begin{cases} \alpha(\arctan \sin x + 1) & \text{per } x \leq 0 \\ e^{x+1} & \text{per } x > 0. \end{cases}$$
(a) Determinare tutti gli $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che il grafico di $f$ ammetta una retta tangente in $(0, f(0))$ e calcolarla per tali $\alpha$;
(b) discutere, al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$, il numero delle soluzioni dell'equazione $f(x) = e + \lambda x$ contenute nell'intervallo $[0, 2]$.

---

Tempo a disposizione: 2 ore e 30 minuti. **Si consiglia di svolgere per primi gli esercizi senza l'asterisco.**

Ogni affermazione deve essere adeguatamente giustificata.

## *Traccia 4*

1) [6 punti] Studiare la convergenza assoluta e la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sin x)^n}{n}$$

al variare del parametro $x \in [0, 2\pi[$.

2) [4 punti] Calcolare

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{\arctan x}.$$

3) Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = xy \\ y(0) = 3. \end{cases}$$

4) [4 + 4 punti]

(a) Calcolare

$$\int_0^2 \sqrt{4 - x^2}\, dx \qquad \text{(eseguire una sostituzione trigonometrica).}$$

(b*) Studiare la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_0^2 (4 - x^2)^{\alpha}\, dx$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

5*) [7 punti] Si consideri la funzione

$$f(x) = |1 - x|\, e^{\arctan(4/x)}.$$

1) Determinare il dominio, calcolare i limiti significativi di $f$ e determinarne gli eventuali asintoti.
2) Calcolare $f'$ nei punti dove è possibile e determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo di $f$.
3) Disegnare un grafico di $f$.

---

Tempo a disposizione: 2 ore e 30 minuti. **Si consiglia di svolgere per primi gli esercizi senza l'asterisco.**

Ogni affermazione deve essere adeguatamente giustificata.

## 2 Altri esercizi di allenamento

**Limiti.**
1) Calcolare i limiti

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x}-2}{x-2},\qquad \lim_{x\to-\infty} x\log\frac{1-x}{3-x},\qquad \lim\left(\frac{x^2}{x^2-2}\right)^{x^2}.$$

2) Calcolare i limiti

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n-n!\sin\frac{1}{n}-n}{2^{n-1}+(n-1)!},\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{e^n-n\sin n}{n!-2^n}.$$

**Serie.**
1) Determinare il carattere delle serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}2^{\frac{1}{n}},\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\cos n}{n^2},\qquad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{n^2+n-1}$$

2) Studiare la convergenza e la convergenza assoluta al variare del parametro $x\in\mathbb{R}$ delle serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{x^n}{n}\right),\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\arctan\frac{x^n}{n}.$$

**Funzioni.**
1) Discutere la derivabilità e calcolare le derivate prime e seconde delle funzioni

$$f_1(x)=\log\frac{1}{\cos x},\qquad f_2(x)=\log|\sin x-\frac{1}{2}|$$

nel loro dominio.
2) Verificare l'identità

$$\arcsin x=\arctan\frac{x}{\sqrt{1-x^2}},\qquad x\in]-1,1[.$$

3) Studiare la monotonia e determinare i punti di massimo e minimo relativi ed assoluti di

$$f_1(x)=\sin x-x\cos x,\qquad f_2(x)=\sqrt{x}-\sqrt{x-1}\ (\text{per } x\in[0,1]),\qquad \arctan\left|x-\frac{1}{x}\right|\ (\text{per } x\neq 0).$$

4) Studiare il numero di soluzioni dell'equazione

$$x-\log|x|=\alpha\qquad (x\neq 0)$$

al variare di $\alpha\in\mathbb{R}$.

**Integrali.**
1) Calcolare lo sviluppo di Taylor di ordine 3 con centro $x_0=1$ delle funzioni

$$F_1(x)=\int_1^x\frac{e^t}{t}\,dt\qquad F_2(x)=\int_1^x\frac{\log t}{t}\,dt$$

e dire se nell'intervallo $[1,2]$ sono invertibili.

2) Calcolare gli integrali

$$\int x\log^2 x\,dx,\quad \int_0^1 \frac{x^2-4}{x^2+5x+4}\,dx,\quad \int \frac{x}{\cos^2 x}\,dx,\quad \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x},\quad \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx.$$

3) Studiare la convergenza degli integrali

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{\sqrt{e^x-1}}\,dx,\quad \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha+x^2}$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

**Equazioni differenziali.**

1) Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = 2y + x - 1 + x\sin x \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

2) Si risolva il problema di Cauchy, specificando l'intervallo massimale di esistenza della soluzione,

$$\begin{cases} y' = \tan y, \\ y(1) = -\frac{\pi}{6}. \end{cases}$$

3) Si risolva il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u''(x) = \frac{u'(x)}{x} + \sqrt{x}, \\ u(1) = 1,\ u'(1) = -1 \end{cases}$$

(sugg.: porre $y(x) = u'(x)$). Specificare l'intervallo massimale di esistenza della soluzione.

4) Trovare gli integrali generali delle equazioni differenziali

$$a)\, y' = -4y;\quad b)\, y' = 3x-1,\quad c)\, y' = -y+2x-1,\quad d)\, y' = y+\cos(2x),\quad e)\, y' = xy + e^{-x}.$$

5) Trovare gli integrali generali delle equazioni differenziali

$$a)\, y''+4y=0;\quad b)\, y''-4y=-1,\quad c)\, y''-4y'=-1,\quad d)\, y''+6y'+9y=e^x\sin x,\quad e)\, y''+2y'-3y=\cos x.$$

6) Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''+2y = -4\sin(2t) \\ y(0) = a,\ y'(0) = b, \end{cases}$$

si determinino i valori iniziali $a$ e $b$ in modo che la soluzione $y(\cdot)$ soddisfi le condizioni $(y(\pi), y'(\pi)) = (0,0)$.

7) Data l'equazione differenziale

$$y'' + \alpha^2 y = -\sin t$$

trovare per quali $\alpha \geq 0$ esistono soluzioni $2\pi$-periodiche e calcolarle tutte.

8) Data l'equazione differenziale

$$y'' + \alpha^2 y = -\cos t$$

trovare per quali $\alpha \geq 0$ esistono soluzioni $2\pi$-periodiche e calcolarle tutte.

9) Si trovi l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$x''(t) + 2x'(t) + 4x(t) = te^t; \tag{1}$$

e si determinino poi tutte le soluzioni $x$ di (1) tali che $x(0) = 0$; si dica poi se tali soluzioni hanno segno costante in $\mathbb{R}$.

10) Data l'equazione differenziale

$$y'' + 2y' = -x^2,$$

(i) calcolare l'integrale generale;

(ii) calcolare, per ogni soluzione $y(x)$, $\lim_{x\to+\infty} y(x)$;

(iii) determinare una soluzione che soddisfi la condizione iniziale $y'(0) = 0$ e si annulli almeno una volta in $]0, +\infty[$;

(iv) [DIFFICILE] dimostrare che tutte le soluzioni che soddisfano le condizioni $y(0) \le 0$ e $y'(0) = 0$ non si annullano mai in $]0, +\infty[$.

**Test.**

**NB: Alcuni tra i seguenti test ammettono più di una risposta corretta.**

1) Il dominio della funzione $f(x) = \ln|2 + x|$ è

A) $\mathbb{R}$ B) $]-2, +\infty[$ C) $]-\infty, -2[$ D) $x > 0$ E) nessuna delle precedenti.

2) La serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n^\alpha + 2}$$

converge

A) per $\alpha < 2$ B) per $\alpha > 2$ C) per $\alpha > 1$ D) per $\alpha < 1$ E) nessuna delle precedenti.

3) Sia

$$F(x) = \int_\pi^x \frac{\cos t}{t+1}\, dt.$$

Allora $F'(\pi/2) =$

A) 0 B) $-F(\pi/2)$ C)$F(\pi/2)$ D) $\int_\pi^{\pi/2} \frac{-\sin t(t+1) - \cos t}{(t+1)^2}\, dt$ E) nessuna delle precedenti.

4) L'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y'' + 2y' = 1$$

è

A) $c_1 + c_2 e^{-x}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ B) $c_1 + c_2 e^{2x} + 1$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ C) $c_1 + c_2 e^{-2x} + c_3 x$, $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ D) $c_1 + c_2 e^{-2x} + x/2$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ E) nessuna delle precedenti.

5) La funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\log|3x|} & \text{per } x \neq 0 \\ 0 & \text{per } x = 0 \end{cases}$$

A) è sempre $\geq 0$ B) è sempre $\leq 0$ C) non è continua in 0 D) è continua in 0 E) nessuna delle precedenti.

6) L'integrale generalizzato

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x^\alpha}\, dx$$

A) converge per ogni $\alpha > 0$ B) diverge per ogni $\alpha > 0$ C) converge per ogni $\alpha < 2$ D) converge per ogni $\alpha > 1$ E) nessuna delle precedenti.

7) Quale tra queste funzioni è soluzione dell'equazione differenziale

$$y' = 1 + y^2?$$

A) $y(x) = \cos x$ B) $y(x) = \tan x$ C) $y(x) = 1 + x^2$ D) $y(x) = 1 - x^2$ E) nessuna delle precedenti.

8) Quale tra queste funzioni è soluzione del problema di Cauchy

$$y'(x) = x,\ y(0) = -1?$$

A) $y(x) = -e^x$ B) $y(x) = x - 1$ C)$y(x) = -1 + x^2/2$ D) $y(x) = x^2/2$ E) nessuna delle precedenti.

9) La funzione $f(x) = \sin |x - \pi|$

A) è derivabile in tutto $\mathbb{R}$ B) non è derivabile in $\pi$ C) non è continua in $\pi$ D) non è derivabile in 0 E) nessuna delle precedenti.

10) La serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$$

A) non converge assolutamente ma converge per il criterio di Leibniz B) converge assolutamente ma non converge C) diverge D) converge assolutamente E) nessuna delle precedenti.

11) Il dominio della funzione $f(x) = \log |x^2 - 1|$ è

A) $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ B) $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ C) $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ D) $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ E) $(0, +\infty)$

12) Data la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2^\alpha}\right)^n$, per quale tra i seguenti valori di $\alpha$ essa converge?

A) $\alpha = 0$ B) $\alpha > 0$ C) $\alpha < 0$ D) $\alpha = 1$ E) nessuna delle precedenti.

13) Quante soluzioni ha l'equazione $|x - 3| + 7 = 0$?

A) 0 B) 1 C) 2 D) infinite E) nessuna delle precedenti.

14) Quante soluzioni ha l'equazione $|x - 3| - 7 = 0$?

A) 0 B) 1 C) 2 D) infinite E) nessuna delle precedenti.

15) Quante soluzioni ha l'equazione $e^x - 5 = 0$?

A) 0 B) 1 C) 2 D) infinite E) nessuna delle precedenti.

16) Quante soluzioni ha l'equazione $e^x - x = 1$?

A) 0 B) 1 C) 2 D) infinite E) nessuna delle precedenti.

17) Quante soluzioni ha l'equazione $e^{|x|} = 3$?

A) 0 B) 1 C) 2 D) infinite E) nessuna delle precedenti.

18) Il $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{(\log n)^3}{n^3}$ vale

A) 1 B) 3 C) $+\infty$ D) $e$ E) nessuna delle precedenti.

19) Il $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{\operatorname{sen} n}{n}$ vale

A) $-1$ B) 0 C) 1 D) non esiste E) nessuna delle precedenti.

20) Sia $f \in C^1(\mathbb{R})$ e si supponga che $f'(x_o) > 0$. Allora

A) $x_o$ è un punto di minimo locale per $f$
B) $x_o$ è un punto di massimo locale per $f$
C) $x_o$ è un punto di flesso orizzontale per $f$
D) è un punto di flesso obliquo per $f$
E) nessuna delle precedenti.

21) Sia $f(x) = 1/x^2$. Allora

A) $f$ è continua nel suo dominio
B) 0 è un punto di discontinuità di prima specie
C) 0 è un punto di discontinuità di seconda specie
D) 0 è un punto di discontinuità eliminabile
E) nessuna delle precedenti.

22) Sia $f \in C^2(\mathbb{R})$ e si supponga che $f''(x_o) = 0$. Allora

A) $x_o$ è un punto di minimo locale per $f$
B) $x_o$ è un punto di massimo locale per $f$
C) è un punto di flesso per $f$
D) può essere un punto di flesso per $f$
E) nessuna delle precedenti.

23) Sia $A = \{x \in \mathbb{R} \mid \operatorname{sen} x > 1/2\}$. Allora $\sup A$ è

A) 0 B) 1 C) 1/2 D) $\operatorname{arcsen} 1/2$ E) nessuna delle precedenti.

24) Sia $A = \{x \in \mathbb{R} \mid e^x > 1\}$. Allora $\inf A$ è

A) $-1$ B) 0 C) 1 D) $\log e$ E) nessuna delle precedenti.

25) Sia $f(x) = |x|^2$. Allora $f$ è derivabile

A) in $\mathbb{R}$ B) ovunque, tranne che per $x = 0$ C) ovunque, tranne che per $x = 1$ D) $f$ non è derivabile E) nessuna delle precedenti.

26) Data una funzione che sia $o(x^3)$ (per $x \to 0$)) allora

A) $\lim_{x\to 0} \frac{o(x^3)}{x} = 0$ B) $\lim_{x\to 0} \frac{o(x^3)}{x^2} = 0$ C) $\lim_{x\to 0} \frac{o(x^3)}{x^3} = 0$ D) $\lim_{x\to 0} \frac{o(x^3)}{x^4} = 0$ E) nessuna delle precedenti.

27) Data una funzione $f$ che sia $O(x^3)$ per $x \to 0$ (cioè esiste una costante $C$ tale che $\left|\frac{f(x)}{x^3}\right| \leq C$ definitivamente per $x \to 0$), allora

A) $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 0$ B) $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^2} = 0$ C) $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^3} = 0$ D) $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^4} = 0$ E) nessuna delle precedenti.

28) Data una funzione $f : A \to \mathbb{R}$, derivabile due volte in $A$, si ha che se $x_0 \in A$ è punto di massimo per $f$ allora necessariamente

A) $f'(x_0) = 0$ B) $f'(x_0) > 0$ C) $f''(x_0) > 0$ D) $f''(x_0) = 0$ E) nessuna delle precedenti.

29) L'integrale $\displaystyle\int_0^5 \frac{1}{|x-3|^\alpha}\,dx$ converge per

A) $\alpha = 0$ B) $0 < \alpha < 1$ C) $\alpha = 1$ D) $\alpha > 1$ E) nessuna delle precedenti.

30) L'equazione $y' = 3$ ha

A) esattamente una soluzione B) esattamente due soluzioni C) infinite soluzioni D) non ha soluzioni E) nessuna delle precedenti.

31) L'equazione $y' = y$ ha

A) 1 soluzione B) 2 soluzioni C) infinite soluzioni D) non ha soluzione E) nessuna delle precedenti.

32) L'ordine di infinitesimo per $x \to 0^+$ di $f(x) = \sin x + \sqrt{x} + x^2$ è

A) 1 B) 2 C) $\frac{1}{2}$ D) non ha ordine E) nessuna delle precedenti.

33) L'ordine di infinitesimo, per $x \to +\infty$, di $f(x) = \frac{\log x}{x^2} + \frac{1}{x} + e^{-x}$ è

A) 1 B) 2 C) non ha ordine D) non è infinitesima E) nessuna delle precedenti.

## 3 Temi d'esame dei tre ultimi anni accademici (le soluzioni si trovano in fondo alla dispensa)

Nota bene. I temi seguenti provengono dai corsi di laurea dell'area di Ingegneria dell'Informazione, nei quali il programma di Analisi Matematica 1 è leggermente diverso, in quanto contiene i numeri complessi ma non contiene le equazioni differenziali e le prove d'esame hanno un regolamento leggermente diverso. Gli esercizi sui numeri complessi non compaiono nelle presente dispensa. Per i temi d'esame per Ingegneria Meccanica degli ultimi anni, contenenti esercizi sulle equazioni differenziali e i test a risposta multipla preliminari allo scritto, si vada ai siti

`https://www.math.unipd.it/~marson/didattica/Analisi1/appAnalisi1.html` (non svolti)

e

`https://www.math.unipd.it/~marson/didattica/Analisi1/temiAnalisi1.html` (svolti).

## Appello del 23.01.2017

### TEMA 1

**Esercizio 1 [6 punti]** Calcolare l'integrale

$$\int_{\log 3}^{2} \frac{e^x}{e^{2x}-4}\,dx$$

**Esercizio 3 [6 punti]** Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^2\Big(\cos\frac{1}{n} - 1 + \sin\frac{1}{2n^\alpha}\Big)$$

al variare del parametro $\alpha > 0$.

**Esercizio 4 [8 punti]** Si consideri la funzione

$$f(x) := \arcsin\frac{|x|-4}{x^2+2}.$$

i) Determinare il dominio $D$ di $f$, le sue eventuali simmetrie e studiarne il segno; determinare i limiti di $f$ agli estremi di $D$;
ii) studiare la derivabilità, calcolare la derivata e studiare la monotonia di $f$; determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto e calcolare i limiti significativi di $f'$;
iii) disegnare un grafico qualitativo di $f$.

**Esercizio 5 [6 punti]** Studiare la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x\,|\arctan(x-1)|}{|1-x^2|^\alpha\,(\sinh\sqrt{x})^\beta}\,dx$$

al variare di $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

**Esercizio facoltativo.** Sia $I$ un intervallo chiuso e limitato e sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione continua e tale che $f(x) \in I$ per ogni $x \in I$. Dimostrare che esiste almeno un $x \in I$ tale che $f(x) = x$.

### TEMA 2

**Esercizio 1 [6 punti]** Calcolare l'integrale

$$\int_0^1 \frac{e^x}{e^{2x}+4e^x+5}\,dx$$

**Esercizio 3 [6 punti]** Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^2\big(2 - e^{1/2n^\alpha} - \cos(1/n)\big)$$

al variare del parametro $\alpha > 0$.

**Esercizio 4 [8 punti]** Si consideri la funzione

$$f(x) := \arcsin \frac{4-|x|}{1+2x^2}.$$

i) Determinare il dominio $D$ di $f$, le sue eventuali simmetrie e studiarne il segno; determinare i limiti di $f$ agli estremi di $D$;
ii) studiare la derivabilità, calcolare la derivata e studiare la monotonia di $f$; determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto e calcolare i limiti significativi di $f'$;
iii) disegnare un grafico qualitativo di $f$.

**Esercizio 5 [6 punti]** Studiare la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_0^{+\infty} \frac{|\arctan(x-2)|\, \arctan x}{|x^2-4|^\alpha\, (\sinh \sqrt[3]{x})^\beta}\, dx$$

al variare di $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

## TEMA 3

**Esercizio 1 [6 punti]** Calcolare l'integrale

$$\int_{\log 4}^{3} \frac{e^x}{e^{2x}-9}\, dx$$

**Esercizio 2 [6 punti]** Risolvere la disequazione

$$\left|3z^2 - 3\bar{z}^2\right| < 2$$

e disegnare le soluzioni sul piano di Gauss.

**Esercizio 3 [6 punti]** Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 \big(\cosh(1/n^\alpha) + \cos(1/n) - 2\big)$$

al variare del parametro $\alpha > 0$.

**Esercizio 4 [8 punti]** Si consideri la funzione

$$f(x) := \arcsin \frac{|x|-4}{2x^2+3}.$$

i) Determinare il dominio $D$ di $f$, le sue eventuali simmetrie e studiarne il segno; determinare i limiti di $f$ agli estremi di $D$;
ii) studiare la derivabilità, calcolare la derivata e studiare la monotonia di $f$; determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto e calcolare i limiti significativi di $f'$;
iii) disegnare un grafico qualitativo di $f$.

**Esercizio 5 [6 punti]** Studiare la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_0^{+\infty} \frac{|\arctan(3-x)|\, \arctan x}{|9-x^2|^\alpha\, (\cosh \sqrt{x} - 1)^\beta}\, dx$$

al variare di $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

## TEMA 4

**Esercizio 1 [6 punti]** Calcolare l'integrale

$$\int_0^1 \frac{e^x}{e^{2x} - 4e^x + 5}\, dx$$

**Esercizio 3 [6 punti]** Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 \big(e^{1/n^2} - \tan 1/n^\alpha - 1\big)$$

al variare del parametro $\alpha > 0$.

**Esercizio 4 [8 punti]** Si consideri la funzione

$$f(x) := \arcsin \frac{4 - 4|x|}{5x^2 + 3}.$$

i) Determinare il dominio $D$ di $f$, le sue eventuali simmetrie e studiarne il segno; determinare i limiti di $f$ agli estremi di $D$;
ii) studiare la derivabilità, calcolare la derivata e studiare la monotonia di $f$; determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto e calcolare i limiti significativi di $f'$;
iii) disegnare un grafico qualitativo di $f$.

**Esercizio 5 [6 punti]** Studiare la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x \, |\arctan(1 - 2x)|}{|1 - 4x^2|^\alpha \, (\cosh x - 1)^\beta}\, dx$$

al variare di $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

## Appello del 13.02.2017

## TEMA 1

**Esercizio 1 [8 punti]** Si consideri la funzione

$$f(x) := \log \big|x^2 - 2x - 3\big|.$$

i) Determinare il dominio $D$ e studiare il segno di $f$; determinare i limiti di $f$ agli estremi di $D$ e gli eventuali asintoti;
ii) studiare la derivabilità, calcolare la derivata, studiare la monotonia e determinare gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto di $f$;
(iii) calcolare $f''$ e studiare la concavità e la convessità di $f$;
(iv) disegnare un grafico qualitativo di $f$.

**Esercizio 2 [5 punti]** Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \frac{n^n}{n!}.$$

**Esercizio 4 [7 punti]** Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\arctan x - \sin x + x^{\frac{10}{3}} \log x}{x^\alpha (1-\cos^2 x)}$$

al variare di $\alpha > 0$.

**Esercizio 5 [8 punti]** Studiare la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha \sqrt{x-2}}\, dx$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ e calcolarlo per $\alpha = 1$.

## TEMA 2

**Esercizio 1 [8 punti]** Si consideri la funzione

$$f(x) := \log\left|x^2 + x - 6\right|.$$

i) Determinare il dominio $D$ e studiare il segno di $f$; determinare i limiti di $f$ agli estremi di $D$ e gli eventuali asintoti;
ii) studiare la derivabilità, calcolare la derivata, studiare la monotonia e determinare gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto di $f$;
(iii) calcolare $f''$ e studiare la concavità e la convessità di $f$;
(iv) disegnare un grafico qualitativo di $f$.

**Esercizio 2 [5 punti]** Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n \frac{n^n}{n!}.$$

**Esercizio 4 [7 punti]** Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\arctan x - \sinh x + x^{\frac{11}{2}} \log x}{x^\alpha (1-\cosh^2 x)}$$

al variare di $\alpha > 0$.

**Esercizio 5 [8 punti]** Studiare la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_3^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha \sqrt{x-3}}\, dx$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ e calcolarlo per $\alpha = 1$.

## TEMA 3

**Esercizio 1 [8 punti]** Si consideri la funzione

$$f(x) := \log\left|x^2 - 2x - 8\right|.$$

i) Determinare il dominio $D$ e studiare il segno di $f$; determinare i limiti di $f$ agli estremi di $D$ e gli eventuali asintoti;
ii) studiare la derivabilità, calcolare la derivata, studiare la monotonia e determinare gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto di $f$;
(iii) calcolare $f''$ e studiare la concavità e la convessità di $f$;
(iv) disegnare un grafico qualitativo di $f$.
**Esercizio 2 [5 punti]** Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3^n} \frac{n^n}{n!}.$$

**Esercizio 4 [7 punti]** Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^{\frac{9}{2}} \log x - \tan x + \sin x}{x^\alpha (1 - \cosh^2 x)}$$

al variare di $\alpha > 0$.
**Esercizio 5 [8 punti]** Studiare la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_4^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha \sqrt{x-4}}\, dx$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ e calcolarlo per $\alpha = 1$.

## TEMA 4

**Esercizio 1 [8 punti]** Si consideri la funzione

$$f(x) := \log \left| x^2 + 3x - 4 \right|.$$

i) Determinare il dominio $D$ e studiare il segno di $f$; determinare i limiti di $f$ agli estremi di $D$ e gli eventuali asintoti;
ii) studiare la derivabilità, calcolare la derivata, studiare la monotonia e determinare gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto di $f$;
(iii) calcolare $f''$ e studiare la concavità e la convessità di $f$;
(iv) disegnare un grafico qualitativo di $f$.
**Esercizio 2 [5 punti]** Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2}{7}\right)^n \frac{n^n}{n!}.$$

**Esercizio 4 [7 punti]** Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sinh x - \tan x - x^{\frac{15}{4}} \log x}{x^\alpha (1 - \cos^2 x)}$$

al variare di $\alpha > 0$.
**Esercizio 5 [8 punti]** Studiare la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_5^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha \sqrt{x-5}}\, dx$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ e calcolarlo per $\alpha = 1$.

**Appello del 10.07.2017**

**TEMA 1**

**Esercizio 1 [8 punti]** Si consideri la funzione

$$f(x) := \log \left| e^{2x} - 4 \right| .$$

i) Determinare il dominio $D$ e studiare il segno di $f$; determinare i limiti di $f$ agli estremi di $D$ e gli eventuali asintoti;
ii) studiare la derivabilità, calcolare la derivata, studiare la monotonia e determinare gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto di $f$;
iii) calcolare $f''$ e studiare la concavità e la convessità di $f$;
iv) disegnare un grafico qualitativo di $f$.

**Esercizio 3 [5 punti]** Calcolare l'integrale

$$\int e^{2x} \arctan(3e^x) dx.$$

**Esercizio 4 [7 punti]** Calcolare il limite

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\arctan \sin x - \sinh x}{x^\alpha (1 - \cos^2 x)}$$

al variare del parametro $\alpha > 0$.

**Esercizio 5 [7 punti]** Studiare la convergenza semplice ed assoluta di

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(1 - e^a)^n}{n + \sqrt{n}}$$

al variare di $a \in \mathbb{R}$.

**TEMA 2**

**Esercizio 1 [8 punti]** Si consideri la funzione

$$f(x) := \log \left| e^{-3x} - 9 \right| .$$

i) Determinare il dominio $D$ e studiare il segno di $f$; determinare i limiti di $f$ agli estremi di $D$ e gli eventuali asintoti;
ii) studiare la derivabilità, calcolare la derivata, studiare la monotonia e determinare gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto di $f$;
iii) calcolare $f''$ e studiare la concavità e la convessità di $f$;
iv) disegnare un grafico qualitativo di $f$.

**Esercizio 3 [5 punti]** Calcolare l'integrale

$$\int e^{2x} \arctan(2e^x) dx.$$

**Esercizio 4 [7 punti]** Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin \arctan x - \sinh x}{x^\alpha(1-\cosh^2 x)}$$

al variare del parametro $\alpha > 0$.

**Esercizio 5 [7 punti]** Studiare la convergenza semplice ed assoluta di

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(1-2^a)^n}{n+\log n}$$

al variare di $a \in \mathbb{R}$.

## Appello del 18.09.2017

### TEMA 1

**Esercizio 1 [8 punti]** Si consideri la funzione

$$f(x) := \frac{3x}{\log|2x|}.$$

i) Determinare il dominio $D$ e studiare le eventuali simmetrie ed il segno di $f$; determinare i limiti di $f$ agli estremi di $D$, l'eventuale prolungabilità di $f$ e gli eventuali asintoti;
ii) studiare la derivabilità, calcolare la derivata ed i suoi limiti significativi, studiare la monotonia e determinare gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto di $f$;
iii) calcolare $f''$ e studiare la concavità e la convessità di $f$;
iv) disegnare un grafico qualitativo di $f$.

**Esercizio 3 [5 punti]** Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{3x}{n}\right)^{n^2}$$

al variare di $x \in \mathbb{R}$.

**Esercizio 4 [7 punti]** Calcolare, al variare del parametro reale $\alpha$, il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\cosh(\alpha x) - e^{x^2} + x\log(\cos x)}{x - \sin x + e^{-1/x^2}}.$$

**Esercizio 5 [7 punti]** Studiare la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_0^{+\infty} x e^{ax}(2+\cos x)\, dx$$

al variare di $a \in \mathbb{R}$. Calcolare poi

$$\int_0^{+\infty} x e^{-x} \cos x\, dx$$

(sugg.: calcolare preliminarmente una primitiva di $e^{-x}\cos x$).

**TEMA 2**

**Esercizio 1 [8 punti]** Si consideri la funzione

$$f(x) := \frac{2x}{\log|3x|}.$$

i) Determinare il dominio $D$ e studiare le eventuali simmetrie ed il segno di $f$; determinare i limiti di $f$ agli estremi di $D$, l'eventuale prolungabilità di $f$ e gli eventuali asintoti;
ii) studiare la derivabilità, calcolare la derivata ed i suoi limiti significativi, studiare la monotonia e determinare gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto di $f$;
iii) calcolare $f''$ e studiare la concavità e la convessità di $f$;
iv) disegnare un grafico qualitativo di $f$.

**Esercizio 3 [5 punti]** Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{2x}{n}\right)^{n^2}$$

al variare di $x \in \mathbb{R}$.

**Esercizio 4 [7 punti]** Calcolare, al variare del parametro reale $\alpha$, il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\cos x - e^{\alpha x^2} + x\log(\cosh x)}{x - \sinh x + e^{-1/x^2}}.$$

**Esercizio 5 [7 punti]** Studiare la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_0^{+\infty} x e^{ax}(2-\sin x)\,dx$$

al variare di $a \in \mathbb{R}$. Calcolare poi

$$\int_0^{+\infty} x e^{-x}\sin x\,dx$$

(sugg.: calcolare preliminarmente una primitiva di $e^{-x}\sin x$).

## Appello del 29.01.2018

**TEMA 1**

**Esercizio 1 [6 punti]** Si consideri la funzione

$$f(x) := \log\frac{|x^2-5|}{x+1}.$$

i) Determinare il dominio $D$ di $f$, le sue eventuali simmetrie e studiarne il segno; determinare i limiti di $f$ agli estremi di $D$ e gli eventuali asintoti;
ii) studiare la derivabilità, calcolare la derivata e studiare la monotonia di $f$ e determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto; NON è richiesta la derivata seconda;
iii) disegnare un grafico qualitativo di $f$.

**Esercizio 2 [6 punti]** Si consideri la successione

$$a_n = \frac{(-1)^n e^{2n} \sin \frac{1}{n}}{(n-1)!}, \quad n \in \mathbb{N}, n \geq 2.$$

a) Calcolare $\lim_{n\to\infty} a_n$;
b) studiare la convergenza assoluta e la convergenza semplice della serie $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$.

**Esercizio 4 [7 punti]** Calcolare il limite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(x+3) - \log(x+1) - \sin \frac{2}{x}}{\cos \sin \frac{1}{2x} - e^{\frac{\alpha}{x^2}} - e^{-x}}$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

**Esercizio 5 [8 punti]** a) Studiare la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_{\sqrt{2}}^{+\infty} \frac{1}{x^{\alpha} \sqrt{x^2 - 2}}\, dx$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$;
b) calcolarlo per $\alpha = 1$.

**Esercizio facoltativo.** Sia $x_0 \in \mathbb{R}$ e si definisca la successione $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ ponendo

$$a_0 = x_0 \text{ e, per ogni } n \geq 1,\ a_{n+1} = \sin a_n.$$

a) Dimostrare che $a_n$ è definitivamente monotona per $n \to +\infty$;
b) dimostrare che $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$.

## TEMA 2

**Esercizio 1 [6 punti]** Si consideri la funzione

$$f(x) := \log \frac{|x^2 - 3|}{x+1}.$$

i) Determinare il dominio $D$ di $f$, le sue eventuali simmetrie e studiarne il segno; determinare i limiti di $f$ agli estremi di $D$ e gli eventuali asintoti;
ii) studiare la derivabilità, calcolare la derivata e studiare la monotonia di $f$ e determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto; NON è richiesta la derivata seconda;
iii) disegnare un grafico qualitativo di $f$.

**Esercizio 2 [6 punti]** Si consideri la successione

$$a_n = \frac{(-1)^n e^{3n} \sinh \frac{1}{n}}{(n-1)!}, \quad n \in \mathbb{N}, n \geq 2.$$

a) Calcolare $\lim_{n\to\infty} a_n$;
b) studiare la convergenza assoluta e la convergenza semplice della serie $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$.

**Esercizio 4 [7 punti]** Calcolare il limite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(x+1)-\log(x+2)+\sinh\frac{1}{x}}{\cosh\sin\frac{1}{x}-e^{\frac{\alpha}{x^2}}-e^{-2x}}$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

**Esercizio 5 [8 punti]** a) Studiare la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_{\frac{1}{2}}^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha\sqrt{4x^2-1}}\,dx$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$;
b) calcolarlo per $\alpha = 1$.

## TEMA 3

**Esercizio 1 [6 punti]** Si consideri la funzione

$$f(x) := \log\frac{|x^2-4|}{x-1}.$$

i) Determinare il dominio $D$ di $f$, le sue eventuali simmetrie e studiarne il segno; determinare i limiti di $f$ agli estremi di $D$ e gli eventuali asintoti;
ii) studiare la derivabilità, calcolare la derivata e studiare la monotonia di $f$ e determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto; NON è richiesta la derivata seconda;
iii) disegnare un grafico qualitativo di $f$.

**Esercizio 2 [6 punti]** Si consideri la successione

$$a_n = \frac{(-1)^n e^{\frac{n}{2}}\arctan\frac{1}{n}}{(n-1)!}, \quad n \in \mathbb{N}, n \geq 2.$$

a) Calcolare $\lim_{n\to\infty} a_n$;
b) studiare la convergenza assoluta e la convergenza semplice della serie $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$.

**Esercizio 4 [7 punti]** Calcolare il limite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(x-2)-\log(x-1)+\arctan\frac{1}{x}}{\cos\sinh\frac{2}{x}-\cos\frac{\alpha}{x}-e^{-\frac{x}{2}}}$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

**Esercizio 5 [8 punti]** a) Studiare la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_{2}^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha\sqrt{x^2-4}}\,dx$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$;
b) calcolarlo per $\alpha = 1$.

## TEMA 4

**Esercizio 1 [6 punti]** Si consideri la funzione

$$f(x) := \log \frac{|x^2 - 6|}{x+1}.$$

i) Determinare il dominio $D$ di $f$, le sue eventuali simmetrie e studiarne il segno; determinare i limiti di $f$ agli estremi di $D$ e gli eventuali asintoti;
ii) studiare la derivabilità, calcolare la derivata e studiare la monotonia di $f$ e determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto; NON è richiesta la derivata seconda;
iii) disegnare un grafico qualitativo di $f$.

**Esercizio 2 [6 punti]** Si consideri la successione

$$a_n = \frac{(-1)^n e^{\frac{n}{3}} \tan \frac{1}{n}}{(n-1)!}, \quad n \in \mathbb{N}, n \geq 2.$$

a) Calcolare $\lim_{n\to\infty} a_n$;
b) studiare la convergenza assoluta e la convergenza semplice della serie $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$.

**Esercizio 4 [7 punti]** Calcolare il limite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(x+3) - \log(x+1) - \tan \frac{2}{x}}{\cosh \sinh \frac{3}{x} - \cosh \frac{\alpha}{x} - e^{-3x}}$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

**Esercizio 5 [8 punti]** a) Studiare la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_{\frac{1}{3}}^{+\infty} \frac{1}{x^{\alpha}\sqrt{9x^2 - 1}}\, dx$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$;
b) calcolarlo per $\alpha = 1$.

## Appello del 16.02.2018

### TEMA 1

**Esercizio 1 [7 punti]** Si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^{x - \frac{1}{|x-2|}} & \text{per } x \neq 2 \\ 0 & \text{per } x = 2. \end{cases}$$

i) Determinare il dominio $D$ di $f$, le sue eventuali simmetrie e studiarne il segno; determinare i limiti di $f$ agli estremi di $D$ e gli eventuali asintoti;
ii) si dica se $f$ è continua in tutto $\mathbb{R}$.
iii) calcolare la derivata e studiare la monotonia di $f$ e determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto; calcolare i limiti significativi di $f'$; in particolare si dica se $f$ è derivabile in tutto $\mathbb{R}$; NON è richiesta la derivata seconda;
iv) disegnare un grafico qualitativo di $f$.

**Esercizio 2 [6 punti]** Studiare al variare di $x \in \mathbb{R}$ la convergenza semplice ed assoluta della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x-1)^n}{(2n+3)^2}.$$

**Esercizio 4 [6 punti]**
Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{(4\cos x-\alpha)^2-4x^4}{x^4\sin^2 x}$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

**Esercizio 5 [7 punti]** a) Studiare la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_0^{\frac{\pi^2}{3}} x^{\alpha}\sin(\sqrt{3x})\,dx$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$;
b) calcolarlo per $\alpha = \frac{1}{2}$.

## TEMA 2

**Esercizio 1 [7 punti]** Si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x-\frac{1}{|x+2|}} & \text{per } x \neq -2 \\ 0 & \text{per } x = -2. \end{cases}$$

i) Determinare il dominio $D$ di $f$, le sue eventuali simmetrie e studiarne il segno; determinare i limiti di $f$ agli estremi di $D$ e gli eventuali asintoti;
ii) si dica se $f$ è continua in tutto $\mathbb{R}$.
iii) calcolare la derivata e studiare la monotonia di $f$ e determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto; calcolare i limiti significativi di $f'$; in particolare si dica se $f$ è derivabile in tutto $\mathbb{R}$; NON è richiesta la derivata seconda;
iv) disegnare un grafico qualitativo di $f$.

**Esercizio 2 [6 punti]** Studiare al variare di $x \in \mathbb{R}$ la convergenza semplice ed assoluta della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{(3n+2)^2}.$$

**Esercizio 4 [6 punti]**
Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{4(\cosh x-\alpha)^2-x^4}{x^4\arctan^2 x}$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

**Esercizio 5 [7 punti]** a) Studiare la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_0^{\frac{\pi^3}{2}} x^{\alpha-1}\sin(\sqrt[3]{2x})\,dx$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$;
b) calcolarlo per $\alpha = 1$.

## TEMA 3

**Esercizio 1 [7 punti]** Si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^{x - \frac{1}{|x-3|}} & \text{per } x \neq 3 \\ 0 & \text{per } x = 3 \end{cases}$$

i) Determinare il dominio $D$ di $f$, le sue eventuali simmetrie e studiarne il segno; determinare i limiti di $f$ agli estremi di $D$ e gli eventuali asintoti;
ii) si dica se $f$ è continua in tutto $\mathbb{R}$.
iii) calcolare la derivata e studiare la monotonia di $f$ e determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto; calcolare i limiti significativi di $f'$; in particolare si dica se $f$ è derivabile in tutto $\mathbb{R}$; NON è richiesta la derivata seconda;
iv) disegnare un grafico qualitativo di $f$.

**Esercizio 2 [6 punti]** Studiare al variare di $x \in \mathbb{R}$ la convergenza semplice ed assoluta della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3x+1)^n}{(2n+5)^2}.$$

**Esercizio 4 [6 punti]**
Calcolare il limite

$$\lim_{x \to 0} \frac{(e^{x^2} - 2\alpha)^2 - x^4}{x^4 \sinh^2 x}$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

**Esercizio 5 [7 punti]** a) Studiare la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_0^{\frac{\pi^2}{8}} x^{1-\alpha} \sin(\sqrt{2x})\, dx$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$;
b) calcolarlo per $\alpha = \frac{1}{2}$.

## TEMA 4

**Esercizio 1 [7 punti]** Si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x - \frac{1}{|x+3|}} & \text{per } x \neq -3 \\ 0 & \text{per } x = -3 \end{cases}$$

i) Determinare il dominio $D$ di $f$, le sue eventuali simmetrie e studiarne il segno; determinare i limiti di $f$ agli estremi di $D$ e gli eventuali asintoti;
ii) si dica se $f$ è continua in tutto $\mathbb{R}$.
iii) calcolare la derivata e studiare la monotonia di $f$ e determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto; calcolare i limiti significativi di $f'$; in particolare si dica se $f$ è derivabile in tutto $\mathbb{R}$; NON è richiesta la derivata seconda;
iv) disegnare un grafico qualitativo di $f$.

**Esercizio 2 [6 punti]** Studiare al variare di $x \in \mathbb{R}$ la convergenza semplice ed assoluta della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{(3n+5)^2}.$$

**Esercizio 4 [6 punti]**
Calcolare il limite

$$\lim_{x \to 0} \frac{2(3\alpha - e^{x^2})^2 - 2x^4}{x^4 \tan^2 x}$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

**Esercizio 5 [7 punti]** a) Studiare la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_0^{\frac{\pi^3}{24}} x^\alpha \sin(\sqrt[3]{3x})\, dx$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$;
b) calcolarlo per $\alpha = 0$.

## Appello del 9.07.2018

## TEMA 1

**Esercizio 1 [6 punti]** Si consideri la funzione

$$f(x) = \log \left| 2 - 3e^{3x} \right|.$$

i) Si determini il dominio $D$ e si studi il segno di $f$;
ii) si determininio i limiti di $f$ agli estremi di $D$ e gli eventuali asintoti;
iii) si calcoli la derivata e si studi la monotonia di $f$, determinandone gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto; non è richiesta la derivata seconda;
iv) si disegni un grafico qualitativo di $f$.

**Esercizio 3 [6 punti]** Calcolare il limite

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\left(\log(1+x) - \log x - \frac{\alpha}{x}\right)^2}{\left(1 - \cos\frac{1}{x}\right)^2 + e^{-x}}$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

**Esercizio 4 [6 punti]** Studiare al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \arctan\left(\frac{2^{\alpha n}}{n}\right).$$

**Esercizio 5 [8 punti]** a) Calcolare una primitiva di

$$f(x) = \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+2)}$$

(sugg.: cercare una decomposizione dell'integrando del tipo $\frac{A}{x^2+1} + \frac{B}{x^2+2}$).
b) Studiare la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_0^{+\infty} \log \frac{x^\alpha + 2}{x^\alpha + 1}\, dx.$$

al variare di $\alpha > 0$.
c) Calcolarlo per $\alpha = 2$.

## TEMA 2

**Esercizio 1 [6 punti]** Si consideri la funzione

$$f(x) = \log \left|2e^{2x} - 3\right|.$$

i) Si determini il dominio $D$ e si studi il segno di $f$;
ii) si determininio i limiti di $f$ agli estremi di $D$ e gli eventuali asintoti;
iii) si calcoli la derivata e si studi la monotonia di $f$, determinandone gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto; non è richiesta la derivata seconda;
iv) si disegni un grafico qualitativo di $f$.

**Esercizio 3 [6 punti]** Calcolare il limite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\cosh \frac{1}{x} - 1\right)^2 - e^{-x}}{\left(\log(2+x) - \log x + \frac{2\alpha}{x}\right)^2}$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

**Esercizio 4 [6 punti]** Studiare al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \arctan\left(\frac{4^{\alpha n}}{n^2}\right).$$

**Esercizio 5 [8 punti]** a) Calcolare una primitiva di

$$f(x) = \frac{x^2}{(x^2+4)(x^2+1)}$$

(sugg.: cercare una decomposizione dell'integrando del tipo $\frac{A}{x^2+1} + \frac{B}{x^2+4}$).
b) Studiare la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_0^{+\infty} \log \frac{x^\alpha + 1}{x^\alpha + 4}\, dx.$$

al variare di $\alpha > 0$.
c) Calcolarlo per $\alpha = 2$.

## Appello del 17.09.2018

## TEMA 1

**Esercizio 1 [7 punti]** Si consideri la funzione

$$f(x) := \begin{cases} e^{-\frac{2}{|x|}}\big(2|x|-3\big) & \text{per } x \neq 0 \\ 0 & \text{per } x = 0. \end{cases}$$

i) Determinare il dominio $D$, le eventuali simmetrie e studiare il segno di $f$;
ii) determinare i limiti di $f$ agli estremi di $D$ e gli eventuali asintoti;
iii) calcolare la derivata e studiare la monotonia di $f$ e determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto; non è richiesta la derivata seconda;
iv) studiare la continuità e (facoltativo) la derivabilità di $f$ (in particolare in $x = 0$);
v) disegnare un grafico qualitativo di $f$.

**Esercizio 3 [6 punti]** Discutere al variare del parametro reale $\alpha$ la convergenza della serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log(n + \sin n)}{n^{\frac{\alpha}{2}} + 2}$$

**Esercizio 4 [6 punti]** Calcolare al variare di $\alpha \in \mathbb{R}^+$ il limite

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x - \sinh x - x^{\alpha}}{\cos x - 1 + x^{\frac{7}{3}} \log x}.$$

**Esercizio 5 [7 punti]** Dato l'integrale

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} x^{\frac{\alpha}{2}} \arcsin 2x^2 \, dx,$$

a) studiarne la convergenza al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$;
b) calcolarlo per $\alpha = 2$.

## TEMA 2

**Esercizio 1 [7 punti]** Si consideri la funzione

$$f(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{|x|}}\big(2-3|x|\big) & \text{per } x \neq 0 \\ 0 & \text{per } x = 0. \end{cases}$$

i) Determinarne il dominio $D$, le eventuali simmetrie e studiare il segno di $f$;
ii) determinare i limiti di $f$ agli estremi di $D$ e gli eventuali asintoti;
iii) calcolare la derivata e studiare la monotonia di $f$ e determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto; non è richiesta la derivata seconda;
iv) studiare la continuità e (facoltativo) la derivabilità di $f$ (in particolare in $x = 0$);
v) disegnare un grafico qualitativo di $f$.

**Esercizio 3 [6 punti]** Discutere al variare del parametro reale $\alpha$ la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(n + \cos n)}{n^{2\alpha} + 1}$$

**Esercizio 4 [6 punti]** Calcolare al variare di $\alpha \in \mathbb{R}^+$ il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x - x - x^\alpha}{\cosh x - 1 + x^{\frac{5}{2}} \log x}.$$

**Esercizio 5 [7 punti]** Dato l'integrale

$$\int_0^{\sqrt{2}} x^{2\alpha} \arcsin \frac{x^2}{2}\, dx,$$

a) studiarne la convergenza al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$;
b) calcolarlo per $\alpha = \frac{1}{2}$.

## Appello del 21.01.2019

### TEMA 1

**Esercizio 1 [6 punti]** Si consideri la funzione

$$f(x) = e^{\frac{|x^2-16|}{x+3}}, \qquad x \in D = ]-\infty, -3[.$$

i) determinare i limiti di $f$ agli estremi di $D$ e gli eventuali asintoti;
ii) studiarne la derivabilità, calcolarne la derivata, studiarne la monotonia, determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto e abbozzarne il grafico.

**Esercizio 2 [4 punti]** Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{2x} - 1 - \sin(2x)}{\sinh^2 x + x^{\frac{9}{2}}}.$$

**Esercizio 4 [5+3+3 punti]** Siano $\alpha \in \mathbb{R}$ fissato e

$$f(t) := \frac{\log\left(1 + \frac{t}{2}\right)}{t^{2\alpha}}.$$

i) Calcolare $\int_1^2 f(t)\, dt$ con $\alpha = 1$.

ii) Sia $F(x) := \int_2^x f(t)\, dt$ con $\alpha = \frac{1}{2}$. Scrivere la formula di Taylor del secondo ordine per $F$ centrata in $x = 2$.

iii) Determinare per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ esiste finito $\int_0^1 f(t)\, dt$.

**Esercizio 5 [7 punti]** Studiare la convergenza semplice ed assoluta della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\log \alpha)^n}{1 + \sqrt{2n}}$$

al variare di $\alpha \in ]0, +\infty[$.

**Esercizio facoltativo** Determinare tutti i valori di $a \in \mathbb{R}$ tali che la funzione $f(x) = e^x - ax^3$ sia convessa in tutto $\mathbb{R}$.

## TEMA 2

**Esercizio 1 [6 punti]** Si consideri la funzione

$$f(x) = e^{\frac{|x^2-4|}{x+1}}, \qquad x \in D = ]-\infty, -1[.$$

i) determinare i limiti di $f$ agli estremi di $D$ e gli eventuali asintoti;
ii) studiarne la derivabilità, calcolarne la derivata, studiarne la monotonia, determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto e abbozzarne il grafico.

**Esercizio 2 [4 punti]** Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sinh(3x) - \log(1+3x)}{\sin^2 x + x^{\frac{11}{2}}}.$$

**Esercizio 4 [5+3+3 punti]** Siano $\alpha \in \mathbb{R}$ fissato e

$$f(t) := \frac{\log\left(1 + \frac{t}{4}\right)}{t^{\frac{\alpha}{2}}}.$$

i) Calcolare $\int_1^4 f(t)\,dt$ con $\alpha = 4$.

ii) Sia $F(x) := \int_4^x f(t)\,dt$ con $\alpha = 2$. Scrivere la formula di Taylor del secondo ordine per $F$ centrata in $x = 4$.

iii) Determinare per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ esiste finito $\int_0^1 f(t)\,dt$.

*Svolgimento.*

**Esercizio 5 [7 punti]** Studiare la convergenza semplice ed assoluta della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\tan\alpha)^n}{\sqrt{2n} - 1}$$

al variare di $\alpha \in ]-\pi/2, +\pi/2[$.

**Esercizio facoltativo** Determinare tutti i valori di $a \in \mathbb{R}$ tali che la funzione $f(x) = e^x - ax^3$ sia convessa in tutto $\mathbb{R}$.

## TEMA 3

**Esercizio 1 [6 punti]** Si consideri la funzione

$$f(x) = e^{\frac{|x^2-3|}{x-1}}, \qquad x \in D = ]-\infty, 1[.$$

i) determinare i limiti di $f$ agli estremi di $D$ e gli eventuali asintoti;
ii) studiarne la derivabilità, calcolarne la derivata, studiarne la monotonia, determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto e abbozzarne il grafico.

**Esercizio 2 [4 punti]** Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{3x} - 1 - \sinh(3x)}{\log^2(1+x) + x^{2\pi}}.$$

**Esercizio 4 [5+3+3 punti]** Siano $\alpha \in \mathbb{R}$ fissato e

$$f(t) := \frac{\log(1+2t)}{t^{\alpha-1}}.$$

i) Calcolare $\int_1^{\frac{3}{2}} f(t)\,dt$ con $\alpha = 3$.

ii) Sia $F(x) := \int_3^x f(t)\,dt$ con $\alpha = 2$. Scrivere la formula di Taylor del secondo ordine per $F$ centrata in $x = 3$.

iii) Determinare per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ esiste finito $\int_0^1 f(t)\,dt$.

**Esercizio 5 [7 punti]** Studiare la convergenza semplice ed assoluta della serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(1+\log\alpha)^n}{\sqrt{n}-1}$$

al variare di $\alpha \in ]0, +\infty[$.

**Esercizio facoltativo** Determinare tutti i valori di $a \in \mathbb{R}$ tali che la funzione $f(x) = e^x - ax^3$ sia convessa in tutto $\mathbb{R}$.

## TEMA 4

**Esercizio 1 [6 punti]** Si consideri la funzione

$$f(x) = e^{\frac{|x^2-5|}{x-2}}, \qquad x \in D = ]-\infty, 2[.$$

i) determinare i limiti di $f$ agli estremi di $D$ e gli eventuali asintoti;
ii) studiarne la derivabilità, calcolarne la derivata, studiarne la monotonia, determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto e abbozzarne il grafico.

**Esercizio 2 [4 punti]** Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sinh(2x) - \log(1+2x)}{\arctan(x^2) + x^{2e}}.$$

**Esercizio 4 [5+3+3 punti]** Siano $\alpha \in \mathbb{R}$ fissato e

$$f(t) := \frac{\log\left(1+\frac{t}{3}\right)}{t^{\alpha+1}}.$$

i) Calcolare $\int_1^3 f(t)\,dt$ con $\alpha = 1$.

ii) Sia $F(x) := \int_3^x f(t)\,dt$ con $\alpha = 0$. Scrivere la formula di Taylor del secondo ordine per $F$ centrata in $x = 3$.

iii) Determinare per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ esiste finito $\int_0^1 f(t)\,dt$.

**Esercizio 5 [7 punti]** Studiare la convergenza semplice ed assoluta della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\tan 2\alpha)^n}{1+\sqrt{n}}$$

al variare di $\alpha \in ]-\pi/4, +\pi/4[$.

**Esercizio facoltativo** Determinare tutti i valori di $a \in \mathbb{R}$ tali che la funzione $f(x) = e^x - ax^3$ sia convessa in tutto $\mathbb{R}$.

## Appello del 11.02.2019

### TEMA 1

**Esercizio 1 [6 punti]** Sia

$$f(x) = |(x+3)\log(x+3)|, \qquad x \in D = ]-3, +\infty[.$$

(i) Determinare i limiti di $f$ agli estremi di $D$ e gli eventuali asintoti; studiarne la prolungabilità per continuità in $x = -3$;
(ii) studiarne la derivabilità, calcolarne la derivata, studiarne la monotonia, determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto ed abbozzarne il grafico.

**Esercizio 2 [4 punti]** Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+n^2)\sin n}{n^4}$$

**Esercizio 4 [5 punti]** Calcolare

$$\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{2x}}\,dx.$$

**Esercizio 5 [3+3 punti]** Sia

$$f_\alpha(x) = \frac{e^{-\sqrt{2x}} - 1}{x^{\alpha-1}}.$$

(a) Si studi la convergenza dell'integrale

$$\int_0^{+\infty} f_\alpha(x)\,dx$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.
(b) Per $\alpha = 2$, sia $F(x) = \int_1^{\cos x} f_\alpha(t)\,dt$: si calcoli $F'(\pi/3)$.

**Esercizio 6 [7 punti]** Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\cosh(\alpha\, x) - \cosh\left(e^{2x}-1\right)}{x^3}$$

al variare del parametro $\alpha > 0$.

**Esercizio facoltativo** Calcolare

$$\lim_{x\to+\infty} \int_x^{x+e^{-x}} e^t \arctan t\,dt.$$

## TEMA 2

**Esercizio 1 [6 punti]** Sia

$$f(x) = |(x+2)\log(x+2)|, \qquad x \in D = ]-2, +\infty[.$$

(i) Determinare i limiti di $f$ agli estremi di $D$ e gli eventuali asintoti; studiarne la prolungabilità per continuità in $x = -2$;
(ii) studiarne la derivabilità, calcolarne la derivata, studiarne la monotonia, determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto ed abbozzarne il grafico.

**Esercizio 2 [4 punti]** Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^3 \sin n}{1-n^5}$$

**Esercizio 4 [5 punti]** Calcolare

$$\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{3x}}\, dx.$$

**Esercizio 5 [3+3 punti]** Sia

$$f_\alpha(x) = \frac{e^{-\sqrt{3x}} - 1}{x^{2\alpha+1}}.$$

(a) Si studi la convergenza dell'integrale

$$\int_0^{+\infty} f_\alpha(x)\, dx$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.
(b) Per $\alpha = 0$, sia $F(x) = \int_1^{\sin x} f_\alpha(t)\, dt$: si calcoli $F'(\pi/6)$.

**Esercizio 6 [7 punti]** Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\cos(\alpha\, x) - \cos\log\big(1+5x\big)}{x^3}$$

al variare del parametro $\alpha > 0$.

**Esercizio facoltativo** Calcolare

$$\lim_{x\to+\infty} \int_x^{x+e^{-x}} e^t \arctan t\, dt.$$

## TEMA 3

**Esercizio 1 [6 punti]** Sia

$$f(x) = |(x+1)\log(x+1)|, \qquad x \in D = ]-1, +\infty[.$$

(i) Determinare i limiti di $f$ agli estremi di $D$ e gli eventuali asintoti; studiarne la prolungabilità per continuità in $x = -1$;
(ii) studiarne la derivabilità, calcolarne la derivata, studiarne la monotonia, determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto ed abbozzarne il grafico.

**Esercizio 2 [4 punti]** Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2 \sin(n^2)}{1-n^5}$$

**Esercizio 4 [5 punti]** Calcolare

$$\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x/2}}\, dx.$$

**Esercizio 5 [3+3 punti]** Sia

$$f_\alpha(x) = \frac{e^{-\sqrt{x/2}} - 1}{x^{\alpha-3}}.$$

(a) Si studi la convergenza dell'integrale

$$\int_0^{+\infty} f_\alpha(x)\, dx$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.
(b) Per $\alpha = 4$, sia $F(x) = \int_1^{\sinh x} f_\alpha(t)\, dt$: si calcoli $F'(\log 3)$.

**Esercizio 6 [7 punti]** Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\cos(\alpha\, x) - \cos\log\big(1+2x\big)}{x^3}$$

al variare del parametro $\alpha > 0$.

**Esercizio facoltativo** Calcolare

$$\lim_{x\to+\infty} \int_x^{x+e^{-x}} e^t \arctan t\, dt.$$

## TEMA 4

**Esercizio 1 [6 punti]** Sia

$$f(x) = |(x+4)\log(x+4)|, \qquad x \in D = ]-4, +\infty[.$$

(i) Determinare i limiti di $f$ agli estremi di $D$ e gli eventuali asintoti; studiarne la prolungabilità per continuità in $x = -4$;
(ii) studiarne la derivabilità, calcolarne la derivata, studiarne la monotonia, determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto ed abbozzarne il grafico.

**Esercizio 2 [4 punti]** Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2-n^2)\sin(n^2)}{n^5}$$

**Esercizio 4 [5 punti]** Calcolare

$$\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x/3}}\, dx.$$

**Esercizio 5 [3+3 punti]** Sia

$$f_\alpha(x) = \frac{e^{-\sqrt{x/3}} - 1}{x^{2\alpha-1}}.$$

(a) Si studi la convergenza dell'integrale
$$\int_0^{+\infty} f_\alpha(x)\,dx$$
al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.
(b) Per $\alpha = 1$, sia $F(x) = \int_1^{\arctan x} f_\alpha(t)\,dt$: si calcoli $F'(\sqrt{3})$.

**Esercizio 6 [7 punti]** Calcolare il limite
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\cosh(\alpha\,x) - \cosh\left(1 - e^{3x}\right)}{x^3}$$
al variare del parametro $\alpha > 0$.

**Esercizio facoltativo** Calcolare
$$\lim_{x\to+\infty} \int_x^{x+e^{-x}} e^t \arctan t\,dt.$$

## Appello del 8.07.2019

### TEMA 1

**Esercizio 1 [6 punti]** Sia
$$f(x) = e^{\frac{2}{|2+\log x|}}.$$
a) Determinare il dominio $D$ di $f$; determinare i limiti di $f$ agli estremi di $D$ e studiare la prolungabilità per continuità di $f$ in $x = 0$;
b) studiare la derivabilità, calcolare la derivata e studiare la monotonia di $f$; determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto;
c) disegnare un grafico qualitativo di $f$.

**Esercizio 2 [4 punti]** Studiare la convergenza della serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\frac{1}{n}}{1 - 2\sqrt{n}}.$$

**Esercizio 4 [5+3+4 punti]** a) Si calcoli una primitiva della funzione
$$e^x \log(1 + 2e^x).$$
Per $\alpha \in \mathbb{R}$, si definisca poi $f_\alpha(x) = e^{\alpha x}\log(1 + 2e^x)$:
b) si studi la convergenza dell'integrale generalizzato
$$\int_0^{+\infty} f_\alpha(x)\,dx$$
al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$;
c) si calcoli lo sviluppo di Taylor di ordine 2 di centro $x_0 = 1$ della funzione
$$F(x) = \int_1^x f_0(t)\,dt.$$

**Esercizio 5 [6 punti]** Calcolare il limite

$$\lim_{x\to+\infty} x^\alpha \left(\sqrt[8]{x^2-2} - \sqrt[4]{x+1}\right)$$

al variare del parametro $\alpha > 0$.

## TEMA 2

**Esercizio 1 [6 punti]** Sia

$$f(x) = e^{\frac{1}{|3+\log x|}}.$$

a) Determinare il dominio $D$ di $f$; determinare i limiti di $f$ agli estremi di $D$ e studiare la prolungabilità per continuità di $f$ in $x = 0$;
b) studiare la derivabilità, calcolare la derivata e studiare la monotonia di $f$; determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto;
c) disegnare un grafico qualitativo di $f$.

**Esercizio 2 [4 punti]** Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}(1-\sqrt{n})\sinh\frac{1}{n^2}.$$

**Esercizio 4 [5+3+4 punti]** a) Si calcoli una primitiva della funzione

$$e^x \log(1+3e^x).$$

Per $\alpha \in \mathbb{R}$, si definisca poi $f_\alpha(x) = e^{\alpha x}\log(1+3e^x)$:
b) si studi la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_0^{+\infty} f_\alpha(x)\,dx$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$;
c) si calcoli lo sviluppo di Taylor di ordine 2 di centro $x_0 = 2$ della funzione

$$F(x) = \int_2^x f_0(t)\,dt.$$

**Esercizio 5 [6 punti]** Calcolare il limite

$$\lim_{x\to+\infty} x^\alpha \left(\sqrt[3]{x+2} - \sqrt[6]{x^2-1}\right)$$

al variare del parametro $\alpha > 0$.

## Appello del 17.09.2019

## TEMA 1

**Esercizio 1 [7 punti]** Sia
$$f(x) = \log\left|e^{3x} - 2\right|.$$
a) Determinare il dominio $D$ e studiare il segno di $f$; determinare i limiti di $f$ agli estremi di $D$ e determinarne gli eventuali asintoti;
b) studiare la derivabilità, calcolare la derivata e studiare la monotonia di $f$; determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto;
c) disegnare un grafico qualitativo di $f$.

**Esercizio 2 [5 punti]** Si calcoli il limite
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{x-2x^2} - 1 - x}{\sinh x^2 + x^{7/3}\log x}.$$

**Esercizio 4 [6+3 punti]** a) Calcolare l'integrale indefinito
$$\int \left(\tan\frac{x}{2}\right)^3 dx \qquad \text{(sugg.: eseguire la sostituzione } \tan\frac{x}{2} = u).$$
b) studiare la convergenza dell'integrale generalizzato
$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\tan x}{x^{\alpha+2}} dx$$
al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

**Esercizio 5 [4+3 punti]** (i) Si dimostri che la successione
$$a_n = \log(n+1) - \log\sqrt{n^2 + \alpha n + 4}$$
è infinitesima per $n \to \infty$ (per ogni $\alpha$) e per $\alpha = 2$ se ne calcoli l'ordine;
(ii) si studi la convergenza della serie
$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n$$
al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

## TEMA 2

**Esercizio 1 [7 punti]** Sia
$$f(x) = \log\left|e^{2x} - 3\right|.$$
a) Determinare il dominio $D$ e studiare il segno di $f$; determinare i limiti di $f$ agli estremi di $D$ e determinarne gli eventuali asintoti;
b) studiare la derivabilità, calcolare la derivata e studiare la monotonia di $f$; determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto;
c) disegnare un grafico qualitativo di $f$.

**Esercizio 2 [5 punti]** Si calcoli il limite
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{x-3x^2} - 1 - x}{\sin x^2 + x^{5/2}\log x}.$$

**Esercizio 4 [6+3 punti]** a) Calcolare l'integrale indefinito

$$\int (\tan 2x)^3 \, dx \qquad \text{(sugg.: eseguire la sostituzione } \tan 2x = u\text{).}$$

b) studiare la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\tan x}{x^{2\alpha-1}} dx$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

**Esercizio 5 [4+3 punti]** (i) Si dimostri che la successione

$$a_n = \log(n+1) - \log\sqrt{n^2 + \alpha n + 3}$$

è infinitesima per $n \to \infty$ (per ogni $\alpha$) e per $\alpha = 2$ se ne calcoli l'ordine;
(ii) si studi la convergenza della serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

# 4 Esercizi scelti dai temi d'esame di anni passati

*Le soluzioni si trovano in rete all'URL*

`https://www.math.unipd.it/~colombo/didattica/analisi1/prove_scritte/index.html.`

**Studi di funzione.**

1) (20.02.2013) Data la funzione

$$f(x) = x\left|3 + \frac{1}{\log(2x)}\right|,$$

(a) determinarne il dominio, calcolarne i limiti agli estremi e determinare eventuali asintoti;
(b) studiarne la prolungabilità agli estremi del dominio e la derivabilità;
(c) calcolare $f'$ e determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo e assoluto di $f$;
(d) calcolare i limiti significativi di $f'$;
(e) disegnare un grafico qualitativo di $f$ (non si richiedono il calcolo della derivata seconda e lo studio della concavità e della convessità).

2) (3.02.2014) Si consideri la funzione

$$f(x) = \arctan\left(\frac{2x}{\log|x| - 1}\right).$$

1) Determinare il dominio e discutere l'eventuale simmetria ed il segno di $f$.

2) Calcolare i limiti significativi di $f$, determinarne gli asintoti e discuterne brevemente la continuità.

3) Calcolare $f'$ e determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo di $f$.

4) Calcolare i limiti significativi di $f'$ e studiare la derivabilità di $f$ in $x = 0$.

5) Disegnare un grafico di $f$ (non si richiedono il calcolo della derivata seconda e lo studio della concavità e della convessità).

3) (26.01.2015) Si consideri la funzione

$$f(x) = |x+1|\, e^{\frac{-1}{|x+3|}} .$$

(a) Determinare il dominio $D$ di $f$; determinare i limiti di $f$ agli estremi di $D$ e gli eventuali asintoti; studiarne la continuità e gli eventuali prolungamenti per continuità;
(b) studiare la derivabilità, calcolare la derivata e studiare la monotonia di $f$; determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto e calcolare i limiti significativi di $f'$;
(c) disegnare un grafico qualitativo di $f$.

**Serie**
1) (16.09.2013) Discutere, al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(n\left(e^{\frac{1}{n}} - 1\right) - \frac{\alpha}{n}\right).$$

2) (26.01.2015) Determinare tutti gli $x \in \mathbb{R}$ tali che la serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log n}{n-1}(x-2)^n$$

converga, risp. converga assolutamente.
3) (25.01.2016) Determinare tutti gli $x \in \mathbb{R}$ tali che la serie

$$\sum_{n=5}^{+\infty} \frac{\big(\log(x-3)\big)^n}{n-1}$$

converga, risp. converga assolutamente.

**Limiti**
1) (20.02.2013) Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^{7/2}\,\log^2 x - 1 + \sin x^2 + \cos\left(1 - e^{\sqrt{2}\,x}\right)}{\sinh x - x^\alpha}$$

al variare del parametro $\alpha > 0$.
2) (3.02.2014) Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sinh x^\alpha - \cos(\sqrt{x}) \log(1 + \sin x)}{\log\cos 2x + x^3 \log x}$$

al variare del parametro $\alpha > 0$.
3) (20.02.2015) (a) Calcolare l'ordine di infinitesimo di

$$e^{x-x^2} - \cos(\alpha x) - \sin x$$

per $x \to 0$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$;
(b) calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x-x^2} - \cos(\alpha x) - \sin x}{\sinh x - \log(1+\sin x)}$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

**Integrali**
1) (7.02.2012) Calcolare l'integrale

$$\int_0^8 e^{\sqrt[3]{x}}\, dx.$$

2) (23.02.2012) Data la funzione

$$f(x) = \frac{2e^x + 1}{e^{2x} + 2e^x + 2},$$

(a) se ne calcoli una primitiva;
(b) si provi che l'integrale generalizzato $\int_0^{+\infty} f(x)\, dx$ è convergente e lo si calcoli.
3) (17.07.2012) (a) Calcolare l'ordine di infinito per $x \to 3$ della funzione

$$g(x) = \frac{x}{9-x^2};$$

b) dire per quali $\alpha \geq 0$ converge l'integrale

$$I = \int_0^3 \frac{x}{\left(9-x^2\right)^\alpha} dx;$$

c) calcolarlo per $\alpha = \frac{1}{2}$.
4) (5.02.2013) Calcolare l'integrale

$$\int_{\log 8}^{+\infty} \frac{\sqrt{e^x+1}}{e^x - 3}\, dx.$$

5) (20.02.2013) Calcolare l'integrale

$$\int_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty} \frac{1}{x^4} \sin\frac{1}{x}\, dx$$

6) (15.07.2013) a) Studiare la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{2\alpha x} - 1}{e^{2x} + 1} dx$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.
b) Calcolarlo per $\alpha = 1/2$.
7) (3.02.2014) Studiare la convergenza dell'integrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{(x+2)^{\frac{\alpha-1}{2}}(4+x)^{2\alpha}}\, dx$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ e calcolarlo per $\alpha = 1$.
8) (15.07.2014) Trovare per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ converge l'integrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha\left(3 + 2\sqrt{x} + x\right)} dx$$

e calcolarlo per $\alpha = 1/2$.

9) (12.09.2014) Determinare gli $\alpha \in \mathbb{R}$ per i quali l'integrale

$$\int_0^4 \frac{\sqrt{x}}{(4-x)^\alpha} dx$$

converge e calcolarlo per $\alpha = 1/2$.

10) (25.01.2016) Calcolare l'integrale

$$\int_0^{1/2} \big(\arcsin 2x\big)^2 dx$$

11) (11.07.2016) Stabilire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ il seguente integrale è convergente

$$\int_0^{\pi/8} \frac{\sin 2x}{|\log(\cos 2x)|^\alpha \cos 2x}\, dx$$

e calcolarne il valore per $\alpha = 1/2$.

# 5 Ulteriori esercizi (a cura di C. Sartori)

**FUNZIONI**

**Esercizio.** Determinare, al variare di $\lambda > 1$ il numero di soluzioni dell'equazione

$$\lambda^x = x^\lambda.$$

**Soluzione.** L'equazione (che ha la soluzione $\lambda$) è equivalente a

$$x \log \lambda = \lambda \log x.$$

Posto $f(x) = x \log \lambda$, $g(x) = \lambda \log x$, si ha $f'(x) = \log \lambda$, $g'(x) = \frac{\lambda}{x}$ e quindi le due funzioni sono tangenti se

$$\begin{cases} x \log \lambda = \lambda \log x \\ \log \lambda = \frac{\lambda}{x}. \end{cases}$$

Si ricava $\lambda = \lambda \log x$ cioè $x = e$ e quindi $\log \lambda = \frac{\lambda}{e}$ da cui $\lambda = e$. La funzione $\log x$ è tangente alla retta $y = \frac{\log \lambda}{\lambda} x$ se $\lambda = e$. Il coefficiente angolare della retta ha un massimo per $\lambda = e$ e quindi confrontando il grafico di $\log x$ con quello della retta $y = \frac{\log \lambda}{\lambda} x$ si ottengono sempre due soluzioni $\forall \lambda > 1$. Per $\lambda = e$ si ha una sola soluzione.

**Esercizio** Data la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = 3x^4 + 4(2a - a^2)x^3 - 12a^3x^2 + a^6,$$

dove $a > 0$ è un parametro fissato. Determinare
a) i punti di massimo e minimo di $f$ e i valori di $f$ in tali punti;
$x = -2a, a^2$ punti di minimo; $x = 0$ punto di massimo; $f(-2a) = -16a^4 - 16a^5 + a^6$, $f(a^2) = -a^8 - 4a^7 + a^6$ $f(0) = a^6$.

b) i valori di $a$ per cui l'equazione $f = 0$ ha 2 zeri positivi;
Basta imporre $f(a^2) < 0$ che implica $a > -2 + \sqrt{5}$;

c) i valori di $a$ per cui l'equazione $f = 0$ ha non piu' di uno zero negativo;
Basta imporre $f(-2a) \geq 0$ che implica $a \geq 8 + \sqrt{80}$.

d) i valori di $a \geq 0$ per cui $f$ è convessa.
$a = 0$

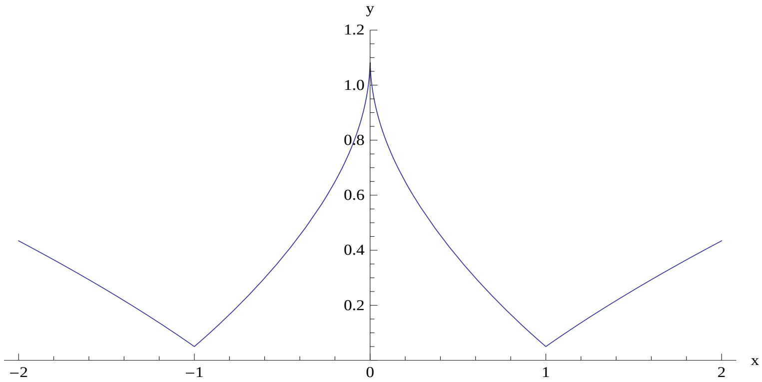
**Esercizio.** Determinare, al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$ il numero di soluzioni dell'equazione

$$\frac{1}{10(1+x^2)} + \left|1 - \sqrt{|x|}\right| = \lambda.$$

**Soluzione.** Studio la funzione $f(x) = \frac{1}{10(1+x^2)} + \left|1 - \sqrt{|x|}\right|$ è pari e quindi basta studiarla per $x \geq 0$. Si ha $f(0) = \frac{11}{10}$, $\lim_{x \to +\infty} = +\infty$ e

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{-2x}{10(1+x^2)^2} - \frac{1}{2\sqrt{x}}, & 0 < x < 1 \\ \frac{-2x}{10(1+x^2)^2} + \frac{1}{2\sqrt{x}}, & x > 1. \end{cases}$$

$f$ è decrescente in $(0, 1)$ e crescente in $(1, +\infty$, quindi $x = 0$ è punto di massimo relativo e $x = 1$ è punto di minimo assoluto. Il grafico è porta alle soluzioni




$$\begin{cases} \lambda < \frac{1}{20} & \text{nessuna soluzione} \\ \lambda = \frac{1}{20} & \text{2 soluzioni} \\ \frac{1}{20} < \lambda < \frac{11}{10} & \text{4 soluzioni} \\ \lambda = \frac{11}{10} & \text{3 soluzioni} \\ \lambda > \frac{11}{10} & \text{2 soluzioni.} \end{cases}$$

**Esercizio** Data la funzione

$$f(x) = 4x^3 - 4ax^2 + a^2x - 1,$$

determinare per quali valori di $a > 0$

a) $f(x)$ ha esattamente tre zeri;

b) tali zeri sono tutti positivi.

**Soluzione.**

a)
$$f'(x) = 12x^2 - 8ax + a^2 = 0 \iff x = \frac{a}{2},\ x = \frac{a}{6}.$$

$x = \frac{a}{2}$ è punto di massimo e $x = \frac{a}{6}$ è punto di minimo. Per avere tre zeri si deve imporre $f(\frac{a}{2}) < 0 < f(\frac{a}{6})$ che è verificato se e solo se $a > \frac{3}{\sqrt[3]{2}}$.

b) Poichè $f(0) = -1 < 0$ per $0 < x < \frac{a}{6}$ c'è uno zero, cosi' come ce ne è uno in $(\frac{a}{6}, \frac{a}{2}$ e infine un terzo per $x > \frac{a}{2}$ dato che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

**Esercizio.** Data la funzione

$$f_a(x) = x^a - ax^2, \quad a > 0,$$

calcolare $\sup\{f_a(x),\, x \ge 0\}$ e $\inf\{f_a(x),\, x \ge 0\}$, specificando se sono massimo o minimo.

**Soluzione.**

$$a > 2 \ \Rightarrow\ \lim_{x\to+\infty} f_a(x) = +\infty = \sup\{f_a(x),\, x \ge 0\};$$

$$a \le 2 \ \Rightarrow\ \lim_{x\to+\infty} f_a(x) = -\infty = \inf\{f_a(x),\, x \ge 0\}.$$

Si ha $f_a'(x) = ax^{a-1} - 2ax = 0 \iff x = 0,\ 2^{\frac{1}{a-2}}$ se $a \ne 2$. $2^{\frac{1}{a-2}}$ è di minimo se $a > 2$, di massimo se $a < 2$. Quindi

$$a > 2 \ \Rightarrow\ \min\{f_a(x),\, x \ge 0\} = 2^{\frac{a}{a-2}} - a2^{\frac{2}{a-2}};$$

$$a < 2 \;\Rightarrow\; \max\{f_a(x),\, x \geq 0\} = 2^{\frac{a}{a-2}} - a2^{\frac{2}{a-2}};$$
$$a = 2 \;\Rightarrow\; \max\{f_2(x),\, x \geq 0\} = 0.$$

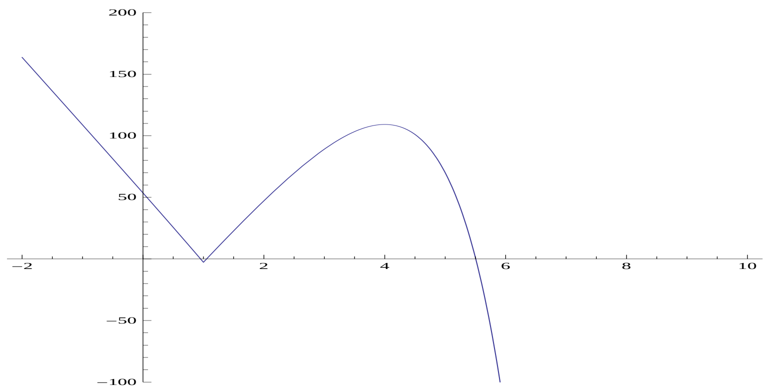
**Esercizio.** Studiare, al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$, il numero di soluzioni dell'equazione

$$-\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^4|x-1| = \lambda.$$

**Sol.** Studio la funzione
$$f(x) = -\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^4|x-1|.$$
$\mathrm{Dom} f = \mathbb{R}$. $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

$$f'(x) = \begin{cases} -\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^4, & \text{per } x > 1 \\ -\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^4, & \text{per } x < 1. \end{cases}$$

C'è un punto di max in $(4, 2\mathrm{e}^4)$ e un punto di min. (angoloso) in $(1, -\mathrm{e})$. Quindi




$$\begin{cases} \lambda > 2\mathrm{e}^4,\ \lambda < -\mathrm{e} & 1 \text{ sol.}, \\ -\mathrm{e} < \lambda < 2\mathrm{e}^4 & 3 \text{ sol.}, \\ \lambda = -\mathrm{e}, 2\mathrm{e}^4 & 2 \text{ sol.}. \end{cases}$$

**Esercizio.** Sia
$$f(x) = \ln(x+4) + \frac{x+8}{x+4}.$$

- Calcolare gli intervalli di concavità e di convessità di $f$ sul suo dominio naturale.
- Individuare il massimo intervallo $A$ contenente $-3$ dove $f$ risulti invertibile.
- Sia $g$ la funzione inversa della $f$ ristretta su $A$. Calcolare $g'(f(-3))$.

**SOL.** $\mathrm{Dom} f = \{x > -4\}$. $f'(x) = x/(4+x)^2$, $f''(x) = (4-x)/(4+x)^3$. Si ha $f''(x) > 0$ per $-4 < x < 4$ e ivi la funzione è convessa, per $x > 4$ concava. Il max intorno di $-3$ in cui $f$ è monotona (decrescente) e quindi invertibile è $-4 < x < 0$. Si ha $f(-3) = 5$, e

$$g'(f(-3)) = \frac{1}{f'(-3)} = -\frac{1}{3}.$$

## FUNZIONI INTEGRALI

**Esercizio.** Studiare la convessità e concavità della funzione

$$F(x) = \int_2^x g(\sin t)\, dt, \quad x \in \mathbb{R},$$

dove $g$ è una funzione derivabile in $\mathbb{R}$ e tale che $g'(x) < 0$.

**Soluzione** Si ha

$$F'(x) = g(\sin x), \text{ e } F''(x) = g'(\sin x)\cos x,$$

da cui

$$F''(x) > 0 \iff \cos x < 0 \iff \frac{\pi}{2} + 2K\pi < x < \frac{3\pi}{2} + 2K\pi$$

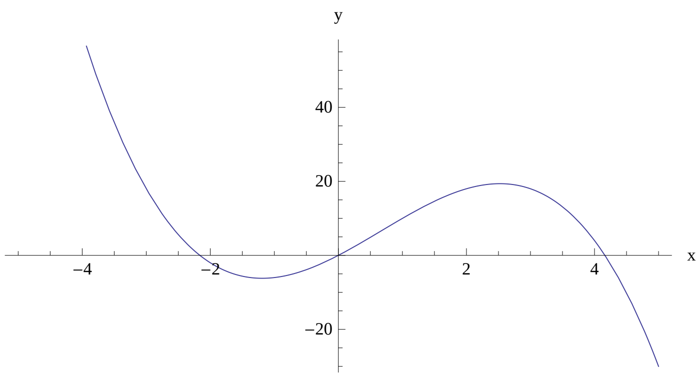
per $K$ intero; nell'unione di tali intervalli $F$ è convessa, e nel complementare è concava.

**Esercizio.** Studiare la funzione

$$F(x) = \int_0^x \frac{(t+1)(3-t)}{\arctan(1+t^2)}\, dt,$$

specificando, in particolare, gli intervalli di crescenza e decrescenza.
Calcolare $\lim_{x\to+\infty} F(x)$ e $\lim_{x\to-\infty} F(x)$ e tracciare un grafico qualitativo.

**Soluzione.** Si ha $F'(x) = \frac{(x+1)(3-x)}{\arctan(1+x^2)}$ e $F'(x) > 0 \iff -1 < x < 3$. $\lim_{x\to+\infty} F'(x) = -\infty$ e $\lim_{x\to-\infty} F'(x) = -\infty$, da cui si ricava $F'(x) < -1$ per $|x| > M$ e quindi $\lim_{x\to+\infty} F(x) = -\infty$ e $\lim_{x\to-\infty} F(x) = +\infty$.




## LIMITI

**Esercizio** Calcolare i seguenti limiti (il terzo al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$),

$$\lim_{x\to3} \frac{x^6-3^6}{x^8-3^8} = 1/12, \quad \lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n^n}\right)^{n!} = 1,$$

$$\lim_{x\to0^+} \frac{\sqrt{x^\alpha+x}+\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}+x^2} = \lim_{x\to0^+} \frac{\sqrt{x^\alpha+x}+\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}} = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha < 2/3 \\ 1 & \text{se } \alpha = 2/3 \\ 0 & \text{se } \alpha > 2/3 \end{cases}$$

## 6 Soluzioni dei Temi 1 delle prove scritte dei tre anni precedenti

**Appello del 23.01.2017**

**TEMA 1**

**Esercizio 1** Calcolare l'integrale

$$\int_{\log(3)}^{2} \frac{e^x}{e^{2x}-4}\,dx$$

*Svolgimento.* Si ha

$$\begin{aligned}\int_{\log(3)}^{2} \frac{e^x}{e^{2x}-4}\,dx &= (\text{ponendo } e^x = t, \text{ per cui } dx = dt/t) \int_3^{e^2} \frac{1}{t^2-4}\,dt \\ &= -\frac{1}{4}\int_3^{e^2} \frac{1}{t+2} - \frac{1}{t-2}\,dt = \frac{1}{4}\ln\frac{|t-2|}{|t+2|}\Big|_3^{e^2} \\ &= \frac{1}{4}\left[\log 5\frac{e^4-2}{e^4+2}\right] = \frac{1}{2}\left(\operatorname{settanh}\frac{3}{2} - \operatorname{settanh}\frac{e^2}{2}\right).\end{aligned}$$

**Esercizio 3** Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^2\big(\cos(1/n) - 1 + \sin(1/2n^\alpha)\big)$$

al variare del parametro $\alpha > 0$.

*Svolgimento.* Dagli sviluppi di Mac Laurin di $\cos x$ e di $\sin x$ risulta, per $n \to +\infty$,

$$\cos(1/n) - 1 + \sin(1/2n) = -\frac{1}{2n^2} + \frac{1}{4!\cdot n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right) + \frac{1}{2n^\alpha} - \frac{1}{3!8n^{3\alpha}} + \frac{1}{5!32n^{5\alpha}} + o\left(\frac{1}{n^{5\alpha}}\right),$$

per cui il termine generale della serie, per $n \to +\infty$, è asintotico a

$$\begin{cases} (\text{se } \alpha < 2) & \frac{n^2}{2n^\alpha} \\ (\text{se } \alpha = 2) & 1/24n^2 \\ (\text{se } \alpha > 2) & -1/2 \end{cases}$$

e quindi ha segno definitivamente costante per $n \to +\infty$. Se $\alpha \neq 2$ il termine generale della serie non è infinitesimo e quindi la serie diverge (a $-\infty$). Per $\alpha = 2$ la serie converge.

**Esercizio 4** Si consideri la funzione

$$f(x) := \arcsin\frac{|x|-4}{2+x^2}.$$

i) Determinare il dominio $D$ di $f$, le sue eventuali simmetrie e studiarne il segno; determinare i limiti di $f$ agli estremi di $D$;
ii) studiare la derivabilità, calcolare la derivata e studiare la monotonia di $f$; determinarne gli eventuali

punti di estremo relativo ed assoluto e calcolare i limiti significativi di $f'$;
iii) disegnare un grafico qualitativo di $f$.

*Svolgimento.* (i) La funzione è pari. $D = \{x \in \mathbb{R} : -1 \le \frac{|x|-4}{2+x^2} \le 1\}$. La disequazione $\frac{|x|-4}{2+x^2} \le 1$ equivale a $|x| - 6 - x^2 \le 0$, che è sempre verificata, mentre $\frac{|x|-4}{2+x^2} \ge -1$ equivale a $x^2 + |x| - 2 \ge 0$, che è verificata per $x \le -1$ e $x \ge 1$. Pertanto $D = [1, +\infty[\ (\cup] - \infty, -1])$. D'ora in poi assumeremo sempre $x \ge 0$. La funzione è continua in $D$, $f(1) = \arcsin(-1) = -\pi/2$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \arcsin 0 = 0$, asintoto orizzontale. Il segno di $f$ è dato dal segno dell'argomento dell'arcoseno, per cui $f(x) \ge 0$ se e solo se $x - 4 \ge 0$ e quindi $x \ge 4$.
(ii) In $D$ si possono applicare le regole di derivazione se l'argomento dell'arcoseno è diverso da $\pm 1$, cioè per $x > 1$. Per tali $x$ si ha

$$f'(x) = \frac{x^2 + 2 - 2x(x-4)}{(2+x^2)^2} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x-4}{2+x^2}\right)^2}} = \frac{-x^2 + 8x + 2}{(1+2x^2)\sqrt{2x^2 + x - 3}},$$

da cui si ricava che $f'(x) \le 0$ se e solo se $-x^2 + 8x + 2 \le 0$, per $x > 1$, cioè per $1 < x < 4 + 3\sqrt{2}$, che pertanto è il punto di massimo assoluto, mentre $x = 1$ è il punto di minimo assoluto. Si ha

$$\lim_{x\to 1^+} f'(x) = +\infty,$$

per cui il grafico di $f$, rappresentato nella figura 1, ha tangente verticale in $(1, \pi/2)$.

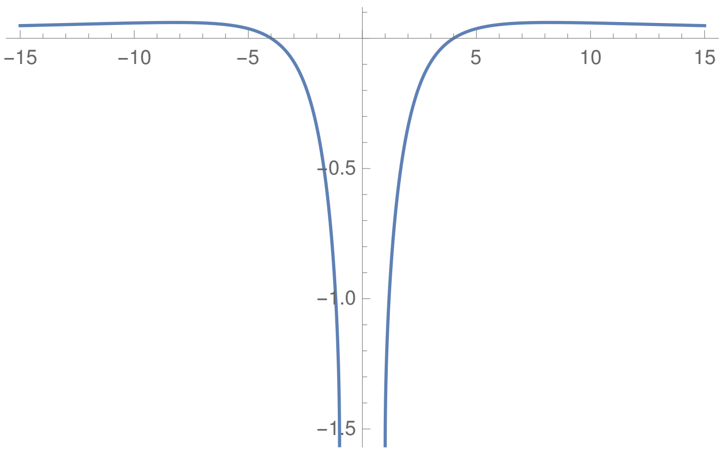



Figura 1: Il grafico di $f$ (Tema 1).

**Esercizio 5** Studiare la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_0^{+\infty} \frac{|\arctan(x-1)|\, \arctan x}{|1-x^2|^\alpha\, (\sinh \sqrt{x})^\beta}\, dx$$

al variare di $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

*Svolgimento.* L'integranda $f(x)$ è continua in $]0,1[\cup]1,+\infty[$, per cui bisogna studiare la convergenza dell'integrale separatamente per $x \to 0^+$, per $x \to 1$ e per $x \to +\infty$.
Per $x \to 0$,

$$f(x) \sim \frac{x \arctan 1}{x^{\beta/2}} = \arctan 1 \frac{1}{x^{\frac{\beta}{2}-1}},$$

e quindi l'integrale converge in 0 se e solo se $\beta < 4$.
Per $x \to 1$,

$$f(x) \sim \frac{\arctan 1\,|x-1|}{|x-1|^\alpha |x+1|^\alpha (\sinh\sqrt{2})^\beta} = \frac{\arctan 1}{2^\alpha (\sinh\sqrt{2})^\beta} \frac{1}{|x-1|^{\alpha-1}},$$

e quindi l'integrale converge in 1 se e solo se $\alpha < 2$.
Per $x \to +\infty$, se $\beta > 0$

$$f(x) \le \frac{\pi^2}{4\,(\sinh\sqrt{x})^\beta} \le \frac{\pi^2}{2^{(2-\beta)}\,e^{(\beta\sqrt{x})}}.$$

Quest'ultima espressione è $o(1/x^2)$ per $x \to +\infty$ e quindi converge.
Se $\beta = 0$,

$$f(x) \sim \pi^2/4x^{2\alpha},$$

quindi converge se $\alpha > 1/2$. Se $\beta < 0$,

$$f(x) \sim \pi^2 e^{-\beta/2}/2^{2-\beta} > 1/x$$

per $x \to +\infty$ e quindi l'integrale diverge. In sintesi, l'integrale converge se $\alpha < 2$ e $0 < \beta < 4$ o se $\beta = 0$ e $1/2 < \alpha < 2$.

**Esercizio facoltativo.** Sia $I$ un intervallo chiuso e limitato e sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione continua e tale che $f(x) \in I$ per ogni $x \in I$. Dimostrare che esiste almeno un $x \in I$ tale che $f(x) = x$.

*Svolgimento.* Consideriamo la funzione $g(x) = f(x) - x$, che vogliamo dimostrare che si annulla in almeno un punto di $I := [a, b]$. Se $g(a), g(b) \neq 0$ allora necessariamente $g(a) > 0$ e $g(b) < 0$, per cui per il teorema degli zeri esiste $\bar{x} \in ]a, b[$ tale che $g(\bar{x}) = 0$.

## Appello del 13.02.2017

## TEMA 1

**Esercizio 1** Si consideri la funzione

$$f(x) := \log\left|x^2 - 2x - 3\right|.$$

i) Determinare il dominio $D$ e studiare il segno di $f$; determinare i limiti di $f$ agli estremi di $D$ e gli eventuali asintoti;
ii) studiare la derivabilità, calcolare la derivata, studiare la monotonia e determinare gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto di $f$;
(iii) calcolare $f''$ e studiare la concavità e la convessità di $f$;
(iv) disegnare un grafico qualitativo di $f$.

**Soluzione.** i) Chiaramente $D = \{x \in \mathbb{R} \ : \ x^2 - 2x - 3 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-1, 3\}$. Per il segno abbiamo

$$f(x) \ge 0, \quad \iff \quad |x^2 - 2x - 3| \ge 1, \quad \iff \quad x^2 - 2x - 3 \le -1, \ \vee \ x^2 - 2x - 3 \ge +1.$$

Abbiamo che $x^2 - 2x - 2 \le 0$ se e solo se $x_0 := 1 - \sqrt{3} \le x \le 1 + \sqrt{3} =: x_1$ e $x^2 - 2x - 4 \ge 0$ se e solo se $x \le 1 - \sqrt{5} =: x_2$ oppure $x \ge 1 + \sqrt{5} =: x_3$. Quindi $f(x) \le 0$ se e solo se $x$ appartiene ad uno dei due intervalli $[x_2, x_0]$ e $[x_1, x_3]$. Per quanto riguarda i limiti, si ha:

è chiaro che $x^2 + 3x - 4 \longrightarrow +\infty$ per $x \longrightarrow \pm\infty$, cosicché $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$. Tuttavia non ci sono asintoti poiché, per $x \to \pm\infty$,

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{\log(x^2 - 2x - 3)}{x} \sim \frac{\log x^2}{x} = \frac{2\log|x|}{x} \longrightarrow 0,$$

essendo $\log|x| = o(x)$ per $x \to \pm\infty$. Per $x \longrightarrow -1, 3$ si ha sempre che $|x^2 + 3x - 4| \longrightarrow 0+$ quindi in ogni caso $f(x) \longrightarrow -\infty$ per cui si hanno gli asintoti verticali $x = -1, 3$.

ii) La funzione è composizione di funzioni continue ove definite, quindi è continua su tutto il proprio dominio. Inoltre è composizione di funzioni derivabili, eccetto quando $x^2 + 3x - 4 = 0$, che però sono punti che non appartengono al dominio di $f$: si conclude che $f$ è derivabile nel proprio dominio. Ricordato che $(\log|y|)' = \frac{1}{y}$ si ha immediatamente che

$$f'(x) = \frac{2x - 2}{x^2 - 2x - 3}.$$

Studiamo il segno di $f'$. Il segno del denominatore è positivo per $x < -1$ oppure $x > 3$. Il numeratore è positivo per $x > 1$. Ne deduciamo la tabella seguente:

| | $-\infty \quad -1$ | $-1 \quad 1$ | $1 \quad 3$ | $3 \quad +\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $\mathrm{sgn}\,(2x-2)$ | $-$ | $-$ | $+$ | $+$ |
| $\mathrm{sgn}\,(x^2-2x-3)$ | $+$ | $-$ | $-$ | $+$ |
| $\mathrm{sgn}\, f'$ | $-$ | $+$ | $-$ | $+$ |
| $f$ | $\searrow$ | $\nearrow$ | $\searrow$ | $\nearrow$ |

I punti $x = -1, 3$ non appartengono al dominio, mentre $x = 1$ è un massimo locale stretto. Non ci sono né massimi né minimi globali essendo $f$ illimitata sia inferiormente che superiormente.

iii) Chiaramente $f'$ è derivabile ove definita in quanto funzione razionale: abbiamo che

$$f''(x) = \frac{-2x^2 + 4x - 10}{(x^2 - 2x - 3)^2}.$$

Quindi $f'' \geq 0$ se e solo se $2x^2 - 4x - 10 \leq 0$, cioè mai. Si conclude che $f'' < 0$ ovunque (dove definita) per cui la funzione è concava in ciascuno degli intervalli che compongono il suo dominio.

iv) Il grafico di $f$ è rappresentato figura 2.

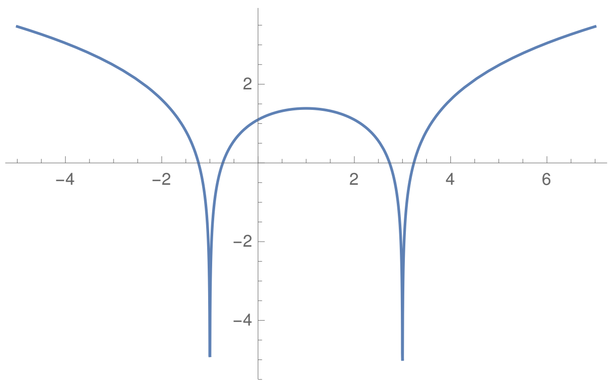



Figura 2: Il grafico di $f$ (Tema 1).

**Esercizio 2** Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \frac{n^n}{n!}.$$

**Soluzione.** La serie è evidentemente a termini di segno costante. Conviene applicare il criterio asintotico del rapporto. Detto $a_n$ il termine generale, risulta

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2} \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{n^n} = \frac{1}{2} \frac{(n+1)^n}{n^n} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \longrightarrow \frac{1}{2} e > 1.$$

Dunque la serie diverge.

**Esercizio 4** Calcolare il limite

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\arctan x - \sin x + x^{\frac{10}{3}} \log x}{x^\alpha (1 - \cos^2 x)}$$

al variare di $\alpha > 0$.

**Soluzione.** Osservato che, in virtù del limite notevole $\lim_{x\to 0^+} x^\gamma \log x = 0$ per ogni $\gamma \in \mathbb{R}$, si ha subito che si tratta di una forma indeterminata del tipo $\frac{0}{0}$. Determiniamo i termini principali col metodo degli sviluppi asintotici. Abbiamo che, per $x \to 0^+$,

$$N(x) := x - \frac{x^3}{3} + o(x^3) - \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) + x^{\frac{10}{3}} \log x = -\frac{x^3}{6} + o(x^3) + x^{\frac{10}{3}} \log x.$$

Osserviamo che $x^{\frac{10}{3}} \log x = o(x^3)$ per $x \to 0^+$: infatti

$$\frac{x^{\frac{10}{3}} \log x}{x^3} = x^{\frac{10}{3} - 3} \log x \to 0, \quad \text{essendo } \frac{10}{3} - 3 > 0,$$

sempre in virtù del limite notevole sopra richiamato. Pertanto $N(x) = \frac{x^3}{6} + o(x^3)$ per $x \to 0^+$. Quanto al denominatore, conviene osservare preliminarmente che

$$(1 - \cos^2 x) = (1 - \cos x)(1 + \cos x) \sim \frac{x^2}{2} \cdot 2 = x^2,$$

per cui $D(x) := x^\alpha (1 - \cos^2 x) \sim x^\alpha \cdot x^2 = x^{\alpha+2}$ per $x \to 0^+$. In conclusione, per $x \to 0^+$ si ha

$$\frac{N(x)}{D(x)} \sim \frac{\frac{x^3}{6}}{x^{\alpha+2}} \longrightarrow \begin{cases} 0, & 1 - \alpha > 0, \iff \alpha < 1, \\ -\frac{1}{6}, & 1 - \alpha = 0, \iff \alpha = 1, \\ -\infty, & 1 - \alpha < 0, \iff \alpha > 1. \end{cases}$$

**Esercizio 5** Studiare la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha \sqrt{x-2}} \, dx$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ e calcolarlo per $\alpha = 1$.

**Soluzione.** Sia $f_\alpha(x) := \frac{1}{x^\alpha \sqrt{x-2}}$ la funzione integranda. Notiamo che essa è continua in $]2,+\infty[$ e dunque l'integrale è generalizzato sia in $x=2$ che per $x \to +\infty$. Avendo evidentemente $f_\alpha$ anche segno costante, andiamo a studiarne il comportamento asintotico agli estremi dell'intervallo di integrazione. Per $x \to +\infty$ abbiamo che

$$f_\alpha(x) \sim \frac{1}{x^\alpha \sqrt{x}} = \frac{1}{x^{\alpha+1/2}},$$

per cui $\int^{+\infty} f_\alpha(x)\,dx < +\infty$ se e solo se $\int^{+\infty} \frac{1}{x^{\alpha+1/2}}\,dx < +\infty$ cioè se e solo se $\alpha+1/2 > 1$, ovvero $\alpha > 1/2$. Per $x \to 2+$ si ha che

$$f_\alpha(x) \sim \frac{1}{2^\alpha \sqrt{x-2}},$$

che è integrabile in $x = 2+$. In conclusione, $f_\alpha$ è integrabile in senso generalizzato in $[2,+\infty[$ se e solo se $\alpha > 1/2$.

Calcoliamo l'integrale nel caso $\alpha = 1$. Siccome è generalizzato abbiamo che

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x-2}}\,dx = \lim_{a\to 2+,\ b\to+\infty} \int_a^b \frac{1}{x\sqrt{x-2}}\,dx.$$

Sostituendo $x-2 = y^2$ $(y>0)$, risulta

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x-2}}\,dx = \int \frac{2y}{(y^2+2)y}\,dy = \frac{1}{2}\int \frac{2}{\left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right)^2+1}\,dy.$$

Sostituendo ancora $y/\sqrt{2} = t$, risulta

$$\int \frac{1}{\left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right)^2+1}\,dy = \sqrt{2}\int \frac{1}{t^2+1}\,dt = \sqrt{2}\,\arctan t + c = \sqrt{2}\arctan\frac{y}{\sqrt{2}} + c.$$

Pertanto,

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x-2}}\,dx = \sqrt{2}\lim_{a\to 2+,\ b\to+\infty}\left(\arctan\sqrt{\frac{b-2}{\sqrt{2}}} - \arctan\sqrt{\frac{a-2}{\sqrt{2}}}\right) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

## Appello del 10.07.2017

### TEMA 1

**Esercizio 1** Si consideri la funzione

$$f(x) := \log\left|e^{2x}-4\right|.$$

i) Determinare il dominio $D$ e studiare il segno di $f$; determinare i limiti di $f$ agli estremi di $D$ e gli eventuali asintoti;
ii) studiare la derivabilità, calcolare la derivata, studiare la monotonia e determinare gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto di $f$;
iii) calcolare $f''$ e studiare la concavità e la convessità di $f$;
iv) disegnare un grafico qualitativo di $f$.

*Svolgimento.* i) Il dominio è

$$D = \{x : e^{2x} \neq 4\} = \mathbb{R} \setminus \{\log 2\}.$$

SI ha $f(x) \geq 0$ se e solo se $|e^{2x} - 4| \geq 1$, cioè se e solo se $e^{2x} \geq 5$ oppure $e^{2x} \leq 3$, quindi

$$f\left(\frac{\log 5}{2}\right) = f\left(\frac{\log 3}{2}\right) = 0 \ \text{ e } f(x) > 0 \text{ se e solo se } x > \frac{\log 5}{2} \text{ oppure } x < \frac{\log 3}{2}.$$

Si ha inoltre

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \log 4, \quad \lim_{x \to \log 2} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

Per quanto riguarda l'asintoto obliquo per $x \to +\infty$, risulta

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\log\left(e^{2x} - 4\right)}{x} = 2, \quad \lim_{x \to +\infty} (f(x) - 2x) = \lim_{x \to +\infty} \log\left(e^{2x} - 4\right) - 2x = \lim_{x \to +\infty} \log \frac{e^{2x} - 4}{e^{2x}} = 0.$$

Quindi $y = 2x$ è asintoto obliquo per $x \to +\infty$, $y = 2\log 2$ è asintoto orizzontale per $x \to -\infty$ e in $x = \log 2$ si ha un asintoto verticale.
ii) $f$ è derivabile in tutto $D$, dove si ha

$$f'(x) = \frac{2e^{2x}}{e^{2x} - 4}.$$

$f$ è perciò strettamente decrescente per $x < \log 2$ e strettamente crescente per $x > \log 2$. Non risultano quindi punti di estremo.
iii) Un calcolo diretto dà

$$f''(x) = \frac{-16e^{2x}}{(e^{2x} - 4)^2},$$

per cui $f$ è concava in $]-\infty, \log 2[$ e in $]\log 2, +\infty[$.
iv) Il grafico è in figura 3.

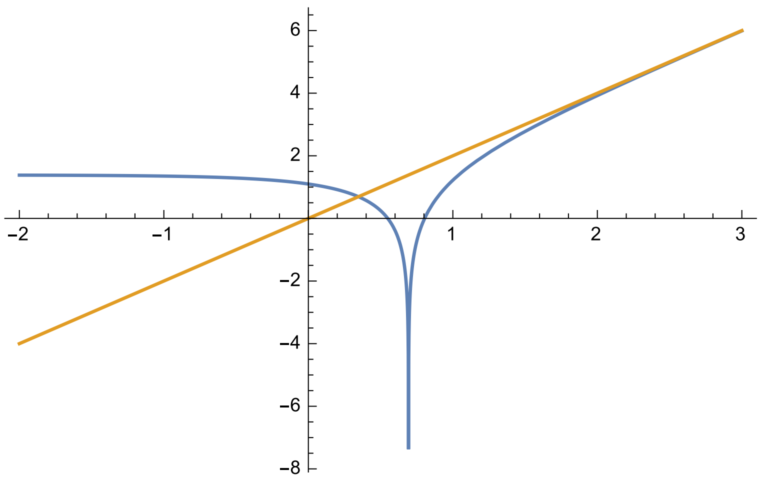



Figura 3: Il grafico di $f$ con l'asintoto obliquo (Tema 1).

**Esercizio 3** Calcolare l'integrale

$$\int e^{2x} \arctan(3e^x)dx.$$

*Svolgimento.* Eseguendo la sostituzione $x = \log t$ si ha

$$\begin{aligned}\int e^{2x} \arctan(3e^x) dx &= \int t \arctan(3t)\, dt = \frac{t^2}{2} \arctan 3t - \frac{3}{2} \int \frac{t^2}{1+9t^2}\, dt \\ &= \frac{t^2}{2} \arctan 3t - \frac{3}{2} \Big[ \frac{1}{9} \int \frac{1+9t^2}{1+9t^2}\, dt - \frac{1}{9} \int \frac{1}{1+(3t)^2}\, dt \Big] \\ &= \frac{t^2}{2} \arctan 3t - \frac{t}{6} + \frac{\arctan 3t}{18} + c \\ &= \frac{e^{2x}}{2} \arctan 3e^x - \frac{e^x}{6} + \frac{\arctan 3e^x}{18} + c, \quad c \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

**Esercizio 4** Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\arctan \sin x - \sinh x}{x^\alpha (1 - \cos^2 x)}$$

al variare del parametro $\alpha > 0$.
*Svolgimento.* Da $\arctan y = y - \frac{y^3}{3} + o(y^3)$ per $y \to 0$ si deduce, per $x \to 0$,

$$\arctan \sin x = \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + o(x^3) = x - \frac{x^3}{6} - \frac{x^3}{3} + o(x^3) = x - \frac{x^3}{2} + o(x^3),$$

per cui, per $x \to 0$,

$$\arctan \sin x - \sinh x = x - \frac{x^3}{2} - \Big( x + \frac{x^3}{6} \Big) + o(x^3) = -\frac{2x^3}{3} + o(x^3).$$

Perciò si ha

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\arctan \sin x - \sinh x}{x^\alpha (1 - \cos^2 x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-2x^3/3 + o(x^3)}{x^{\alpha+2} + o(x^{2+\alpha})} = \begin{cases} 0 & \text{per } \alpha < 1 \\ -\frac{2}{3} & \text{per } \alpha = 1 \\ -\infty & \text{per } \alpha > 1. \end{cases}$$

**Esercizio 5** Studiare la convergenza semplice ed assoluta di

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(1 - e^a)^n}{n + \sqrt{n}}$$

al variare di $a \in \mathbb{R}$.
*Svolgimento.* Per la convergenza assoluta si può usare il criterio della radice, che dà

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{|1 - e^a|^n}{n + \sqrt{n}}} = |1 - e^a|.$$

La serie perciò converge assolutamente (e quindi semplicemente) se $|1 - e^a| < 1$ e diverge assolutamente e non converge semplicemente se $|1 - e^a| > 1$, in quanto il termine generale non è infinitesimo. Per $|1 - e^a| = 1$ il criterio della radice non dà informazioni. Risolvendo le disequazioni si ricava che la serie converge assolutamente per $a < \log 2$ e non converge per $a > \log 2$. Per $a = \log 2$ la serie diventa

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n + \sqrt{n}}.$$

Per asintoticità con la serie armonica $\sum 1/n$ questa serie non converge assolutamente. Inoltre essa converge semplicemente per il criterio di Leibniz, essendo il termine generale a segno alterno e – in valore assoluto – infinitesimo e decrescente.

**Appello del 18.09.2017**

**TEMA 1**

**Esercizio 1** Si consideri la funzione
$$f(x) := \frac{3x}{\log|2x|}.$$
i) Determinare il dominio $D$ e studiare le eventuali simmetrie ed il segno di $f$; determinare i limiti di $f$ agli estremi di $D$, l'eventuale prolungabilità di $f$ e gli eventuali asintoti;
ii) studiare la derivabilità, calcolare la derivata ed i suoi limiti significativi, studiare la monotonia e determinare gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto di $f$;
iii) calcolare $f''$ e studiare la concavità e la convessità di $f$;
iv) disegnare un grafico qualitativo di $f$.
*Svolgimento.* i) Il dominio è $D = \{x : x \neq 0, \log|2x| \neq 0\} = \{x : x \neq 0, x \neq \pm\frac{1}{2}\}$. La funzione è visibilmente dispari, per cui la studiamo in $[0, +\infty[$. Per $x > 0$, $f(x) > 0$ se e solo se $x > \frac{1}{2}$. Si ha
$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0 \qquad \text{(per cui } f \text{ è prolungabile con continuità in } x = 0)\\
&\lim_{x\to \frac{1}{2}^-} f(x) = -\infty\\
&\lim_{x\to \frac{1}{2}^+} f(x) = +\infty\\
&\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty\\
&\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0 \qquad \text{(per cui non c'è asintoto obliquo per } x \to +\infty).
\end{aligned}$$
ii) Per $x > 0, x \neq \frac{1}{2}$ si ha
$$f'(x) = \frac{3\log 2x - 3}{\log^2 2x}.$$
Essendo $f$ prolungabile con continuità in $x = 0$, vediamo se il prolungamento di $f$ è derivabile in 0. A tale scopo calcoliamo
$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = 0,$$
per cui la prolungata di $f$ è derivabile anche in $x = 0$, con derivata nulla. Il segno di $f'$ dipende solo dal segno di $\log 2x - 1$, che è positivo se e solo se $x > e/2$. Pertanto $e/2$ è un punto di minimo locale stretto. Non ci sono estremi assoluti.
iii) Per $x > 0, x \neq \frac{1}{2}$ si ha
$$f''(x) = 3\frac{\frac{\log^2 2x}{x} - 2(\log 2x - 1)\frac{\log 2x}{x}}{\log^4 2x} = 3\frac{2 - \log 2x}{x\log^3 2x},$$
che risulta $> 0$ se e solo se $\frac{1}{2} < x < \frac{e^2}{2}$, cioè $f$ è convessa nell'intervallo $]\frac{1}{2}, \frac{e^2}{2}[$ e concava negli intervalli $]0, \frac{1}{2}[$ e $[\frac{1}{2}, +\infty[$.
iv) Il grafico di $f$ è riportato nella figura 4.

**Esercizio 3** Studiare la convergenza della serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{3x}{n}\right)^{n^2}$$

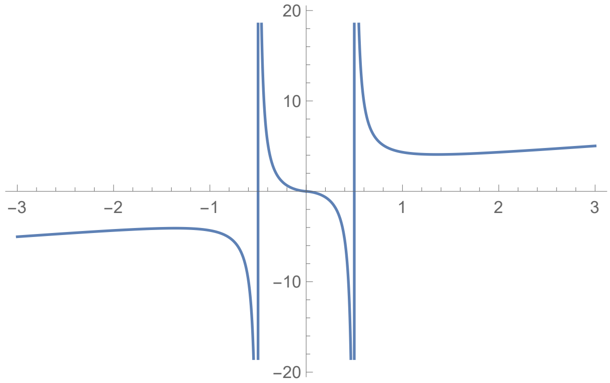



Figura 4: Il grafico di $f$ (Tema 1).

al variare di $x \in \mathbb{R}$.
*Svolgimento.* La serie è a termini definitivamente positivi per ogni $x \in \mathbb{R}$. Il criterio della radice dà

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left(1+\frac{3x}{n}\right)^{n^2}} = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{3x}{n}\right)^n = e^{3x}.$$

La serie pertanto converge per ogni $x < 0$ e diverge per ogni $x > 0$. Per $x = 0$ il criterio della radice non dà informazioni, ma per tale $x$ la serie ha per termine generale 1 e quindi diverge.

**Esercizio 4** Calcolare, al variare del parametro reale $\alpha$, il limite

$$\lim_{x\to0^+} \frac{\cosh(\alpha x) - e^{x^2} + x\log(\cos x)}{x - \sin x + e^{-1/x^2}}.$$

*Svolgimento.* Il numeratore, per $x \to 0$, si sviluppa come

$$\begin{aligned}
\cosh \alpha x &= 1 + \frac{1}{2}\alpha^2x^2 + \frac{1}{24}\alpha^4x^4 + o(x^4) = 1 + \frac{1}{2}\alpha^2x^2 + o(x^3)\\
-e^{x^2} &= -1 - x^2 - \frac{1}{2}x^4 + o(x^4) = -1 - x^2 + o(x^3)\\
x\log\cos x &= x\log\Big(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)\Big) = x\Big(\frac{-x^2}{2} + o(x^2)\Big) = \frac{-x^3}{2} + o(x^3),
\end{aligned}$$

per cui

$$\cosh(\alpha x) - e^{x^2} + x\log(\cos x) = x^2\Big(\frac{\alpha^2}{2} - 1\Big) - \frac{x^3}{2} + o(x^3) = \begin{cases} x^2\Big(\frac{\alpha^2}{2} - 1\Big) + o(x^2) & \text{se } \alpha \neq \pm\sqrt{2}\\ -\frac{x^3}{2} + o(x^3) & \text{se } \alpha = \pm\sqrt{2}.\end{cases}$$

Il denominatore, per $x \to 0$, si sviluppa come

$$x - \sin x + e^{-1/x^2} = \frac{x^3}{6} + o(x^3),$$

in quanto $e^{-1/x^2} = o(x^\beta)$ per ogni $\beta$ reale. Il limite quindi vale

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\cosh(\alpha x) - e^{x^2} + x\log(\cos x)}{x - \sin x + e^{-1/x^2}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2\left(\frac{\alpha^2}{2} - 1\right) - \frac{x^3}{2} + o(x^3)}{\frac{x^3}{6} + o(x^3)}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \begin{cases} \frac{x^2\left(\frac{\alpha^2}{2}-1\right)+o(x^2)}{\frac{x^3}{6}+o(x^3)} & \text{se } \alpha \neq \pm\sqrt{2} \\ \\ \frac{-\frac{x^3}{2}+o(x^3)}{\frac{x^3}{6}+o(x^3)} & \text{se } \alpha = \pm\sqrt{2}. \end{cases}$$

$$= \begin{cases} +\infty & \text{se } |\alpha| < \sqrt{2} \\ -\infty & \text{se } |\alpha| > \sqrt{2} \\ -3 & \text{se } \alpha = \pm\sqrt{2}. \end{cases}$$

**Esercizio 5** Studiare la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_0^{+\infty} xe^{ax}(2 + \cos x)\, dx$$

al variare di $a \in \mathbb{R}$. Calcolare poi

$$\int_0^{+\infty} xe^{-x}\cos x\, dx$$

(sugg.: calcolare preliminarmente una primitiva di $e^{-x}\cos x$).
*Svolgimento.* Una primitiva dell'integranda può essere calcolata per ogni $a$, per cui la discussione della convergenza può essere fatta sia direttamente dalla definizione, sia mediante criteri di convergenza. Usando il criterio del confronto si ha, per $a \geq 0$,

$$xe^{ax}(2 + \cos x) \geq x \text{ per ogni } x \geq 0$$

e quindi l'integrale diverge. Per $a < 0$ il confronto asintotico dà, ad esempio,

$$xe^{ax}(2 + \cos x) = o(e^{ax/2}),$$

perché

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{xe^{ax}(2 + \cos x)}{e^{ax/2}} \leq \lim_{x\to+\infty} \frac{3xe^{ax}}{e^{ax/2}} = \lim_{x\to+\infty} 3xe^{\frac{ax}{2}} = 0.$$

Siccome $\int_0^{+\infty} e^{ax/2}\, dx < +\infty$, l'integrale converge.
Per la primitiva, calcoliamo preliminarmente

$$\int e^{-x}\cos x\, dx = -e^{-x}\cos x - \int e^{-x}\sin x\, dx$$
$$= -e^{-x}\cos x + e^{-x}\sin x - \int e^{-x}\cos x\, dx,$$

per cui

$$\int e^{-x}\cos x\, dx = \frac{e^{-x}}{2}(\sin x - \cos x) + c.$$

Ora integriamo per parti prendendo $x$ come fattore finito e $e^{-x}\cos x$ come fattore differenziale. Risulta

$$\int xe^{-x}\cos x\,dx = x\frac{e^{-x}}{2}(\sin x-\cos x)-\int \frac{e^{-x}}{2}(\sin x-\cos x)\,dx.$$

Calcoliamo separatamente

$$\begin{aligned}\int e^{-x}\sin x\,dx &= -e^{-x}\sin x+\int e^{-x}\cos x\,dx\\ &= -e^{-x}\sin x-e^{-x}\cos x-\int e^{-x}\sin x\,dx,\end{aligned}$$

per cui

$$\int e^{-x}\sin x\,dx = -\frac{e^{-x}}{2}(\sin x+\cos x)+c.$$

In definitiva,

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} xe^{-x}\cos x\,dx &= \lim_{b\to+\infty}[-x\frac{e^{-x}}{2}(\sin x-\cos x)\Big|_0^b+\frac{1}{4}e^{-x}(\sin x+\cos x)\Big|_0^b\\ &\quad +\frac{1}{4}e^{-x}(\sin x-\cos x)\Big|_0^b]\\ &= 0.\end{aligned}$$

(NB. Non è strano che il risultato sia nullo: l'integranda non ha segno costante.)

# Appello del 29.01.2018

### TEMA 1

**Esercizio 1** Si consideri la funzione

$$f(x):=\log\frac{|x^2-5|}{x+1}.$$

i) Determinare il dominio $D$ di $f$, le sue eventuali simmetrie e studiarne il segno; determinare i limiti di $f$ agli estremi di $D$ e gli eventuali asintoti;
ii) studiare la derivabilità, calcolare la derivata e studiare la monotonia di $f$ e determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto;
iii) disegnare un grafico qualitativo di $f$.
*Svolgimento.* i) Da $\frac{|x^2-5|}{x+1}>0$ segue che $D=\{x>-1, x\neq\sqrt{5}\}$. Non ci sono simmetrie evidenti. $f(x)\leq 0$ se e solo se

$$x>-1$$

e

$$|x^2-5|\leq x+1 \Leftrightarrow -x-1\leq x^2-5\leq x+1 \Leftrightarrow \begin{cases}x^2+x-4\geq 0\\ x^2-x-6\leq 0,\end{cases}$$

cioè se e solo se $\frac{-1+\sqrt{17}}{2}\leq x\leq 3$.

Si ha inoltre

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-1^+} f(x) &= +\infty\\ \lim_{x\to\sqrt{5}} f(x) &= -\infty\\ \lim_{x\to+\infty} f(x) &= +\infty.\end{aligned}$$

Siccome

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0,$$

non ci sono asintoti obliqui, ma solo due asintoti verticali (oltre ad un asintoto orrizzontale "così alto che non si vede" (cit.))
ii) Le regole di derivazione possono essere applicate in tutto $D$, perché il punto nel quale l'argomento del modulo si annulla non appartiene al dominio. Siccome $f(x)=\log|x^2-5|-\log(x+1)$ e ricordando che $\frac{d}{dx}\log|g(x)|=\frac{g'(x)}{g(x)}$ dove $g(x)\neq 0$, si ha per ogni $x\in D$

$$f'(x)=\frac{2x}{x^2-5}-\frac{1}{x+1}=\frac{x^2+2x+5}{(x^2-5)(x+1)}.$$

Siccome il polinomio al numeratore è sempre positivo, $f'(x)>0$, e quindi $f$ è crescente, se e solo se $x>\sqrt{5}$. Non ci sono punti di estremo.
iii) Il grafico di $f$ è in figura 5.

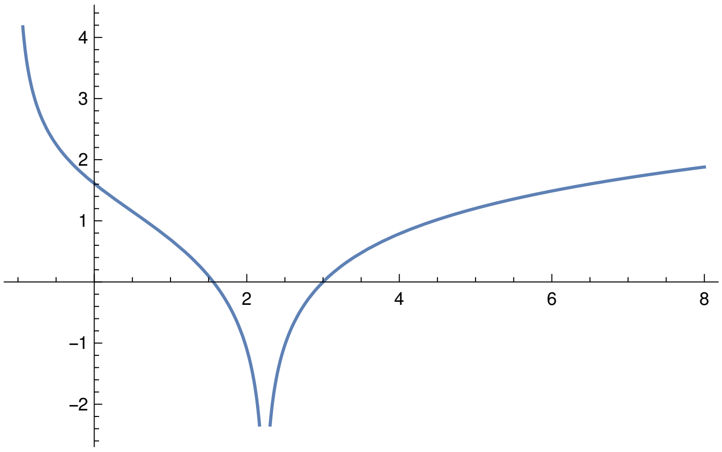



Figura 5: Il grafico di $f$ (Tema 1).

**Esercizio 2** Si consideri la successione

$$a_n=\frac{(-1)^n e^{2n}\sin\frac{1}{n}}{(n-1)!},\quad n\in\mathbb{N}, n\geq 2.$$

a) Calcolare $\lim_{n\to\infty}a_n$;
b) studiare la convergenza assoluta e la convergenza semplice della serie $\sum_{n=2}^{\infty}a_n$.
*Svolgimento.* a) Siccome $a_n\sim\frac{(e^2)^n}{n!}$ per $n\to\infty$, $\lim_{n\to\infty}a_n=0$ (ricordando un limite fondamentale).
b) Il criterio del confronto asintotico e il criterio del rapporto danno

$$\lim_{n\to\infty}\frac{e^{2(n+1)}}{(n+1)!}\frac{n!}{e^{2n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{e^2}{n+1}=0,$$

per cui la serie converge assolutamente e quindi converge.
Il fatto che $a_n\to 0$ si poteva anche dedurre direttamente dalla convergenza della serie.

NOTA: applicando il criterio di Leibniz si può dedurre direttamente la convergenza della serie. Risulta che $|a_n|$ è decrescente se e solo se $e^2\leq n$, il che ÃÍ vero per ogni $n>2$ (la dimostrazione richiede un po' di lavoro). Resta comunque da verificare la convergenza assoluta. Siccome in questo caso è vera, l'uso del criterio di Leibniz è del tutto inutile.

**Esercizio 4** Calcolare il limite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(x+3)-\log(x+1)-\sin\frac{2}{x}}{\cos\sin\frac{1}{2x}-e^{\frac{\alpha}{x^2}}-e^{-x}}$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

*Svolgimento.* Il numeratore:

$$\begin{aligned}
\log(x+3)-\log(x+1)-\sin\frac{2}{x} &= \log x + \log\Big(1+\frac{3}{x}\Big) - \log x - \log\Big(1+\frac{1}{x}\Big) - \sin\frac{2}{x} \\
&= \log\Big(1+\frac{3}{x}\Big) - \log\Big(1+\frac{1}{x}\Big) - \sin\frac{2}{x} \\
&= \frac{3}{x} - \frac{9}{2x^2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} - \frac{2}{x} + o\Big(\frac{2}{x^2}\Big) \\
&= -\frac{4}{x^2} + o\Big(\frac{1}{x^2}\Big)
\end{aligned}$$

per $x \to +\infty$. Il denominatore (ricordando che $e^{-x} = o(1/x^\alpha)$ per $x \to +\infty$ per ogni $\alpha$):

$$\begin{aligned}
\cos\sin\frac{1}{x} - e^{\frac{\alpha}{x^2}} - e^{-x} &= 1 - \frac{1}{2}\sin^2\frac{1}{2x} + \frac{1}{24}\sin^4\frac{1}{2x} - \Big(1+\frac{\alpha}{x^2}+\frac{\alpha^2}{2x^4}\Big) + o\Big(\frac{1}{x^4}\Big) \\
&= -\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{2x} - \frac{1}{6(2x)^3}\Big)^2 + \frac{1}{24(2x)^4} - \frac{\alpha}{x^2} - \frac{\alpha^2}{2x^4} + o\Big(\frac{1}{x^4}\Big) \\
&= \Big(-\frac{1}{8}-\alpha\Big)\frac{1}{x^2} + \Big(\frac{1}{96}+\frac{1}{24\cdot 2^4}-\frac{\alpha^2}{2}\Big)\frac{1}{x^4} + o\Big(\frac{1}{x^4}\Big)
\end{aligned}$$

$$= \begin{cases} -\Big(\frac{1}{8}+\alpha\Big)\frac{1}{x^2} + o\Big(\frac{1}{x^2}\Big) & \text{se } \alpha \neq -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{192}\frac{1}{x^4} + o\Big(\frac{1}{x^4}\Big) & \text{se } \alpha = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

per $x \to +\infty$. Di conseguenza,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(x+3)-\log(x+1)-\sin\frac{2}{x}}{\cosh\sin\frac{1}{2x}-e^{\frac{\alpha}{x^2}}-e^{-x}} = \lim_{x\to+\infty} \begin{cases} \dfrac{\frac{-4}{x^2}+o\Big(\frac{1}{x^2}\Big)}{-\Big(\frac{1}{8}+\alpha\Big)\frac{1}{x^2}+o\Big(\frac{1}{x^2}\Big)} = \frac{32}{1+8\alpha} & \text{se } \alpha \neq -\frac{1}{8} \\ \dfrac{\frac{-4}{x^2}+o\Big(\frac{1}{x^2}\Big)}{\frac{1}{192}\frac{1}{x^4}+o\Big(\frac{1}{x^4}\Big)} = -\infty & \text{se } \alpha = \frac{1}{8}. \end{cases}$$

NOTA: Il numeratore poteva anche essere scritto come

$$\begin{aligned}
\log(x+3)-\log(x+1)-\sin\frac{2}{x} &= \log\frac{x+3}{x+1} - \sin\frac{2}{x} = \log\Big(1+\frac{2}{x+1}\Big) - \sin\frac{2}{x} \\
&= \frac{2}{x+1} - \frac{1}{2}\Big(\frac{2}{x+1}\Big)^2 - \frac{2}{x} + o\Big(\frac{2}{x^2}\Big) \\
&= -2\frac{2x+1}{x(x+1)^2} + o\Big(\frac{2}{x^2}\Big) \\
&= -2\frac{1+2x}{x(x+1)^2} + o\Big(\frac{2}{x^2}\Big) \sim -\frac{4}{x^2}
\end{aligned}$$

per $x \to +\infty$. La maggior parte degli studenti che ha svolto il calcolo in questo modo ha tralasciato il termine di ordine 2 nello sviluppo del logaritmo.

**Esercizio 5** a) Studiare la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_{\sqrt{2}}^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha \sqrt{x^2-2}}\, dx$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$;
b) calcolarlo per $\alpha = 1$.
*Svolgimento.* a) L'integranda $f(x)$ è continua in $]\sqrt{2}, +\infty[$, per cui si deve controllare la convergenza sia per $x \to \sqrt{2}^+$ che per $x \to +\infty$. Per $x \to \sqrt{2}+$,

$$f(x) \sim \frac{1}{\sqrt{x-\sqrt{2}}},$$

per cui l'integrale converge per ogni $\alpha$. Per $x \to +\infty$,

$$f(x) \sim \frac{1}{x^{\alpha+1}},$$

per cui l'integrale converge se e solo se $\alpha > 0$.
b) Con la sostituzione $x = \sqrt{2}\cosh t$, si ha (per $t > 0$)

$$\int_{\sqrt{2}}^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x^2-2}}\, dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{2}\sinh t}{2\cosh t \sinh t}\, dt = \sqrt{2}\int_0^{+\infty} \frac{e^t}{1+e^{2t}}\, dt = \sqrt{2}\arctan e^t\Big|_0^{+\infty} = \sqrt{2}\Big(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\Big) = \frac{\sqrt{2}\pi}{4}.$$

In alternativa, con la sostituzione $y = \sqrt{x^2-2}$, seguita dalla sostituzione $z = y/\sqrt{2}$, si ottiene,

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x^2-4}}\, dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{y^2+4}\, dy = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{+\infty} \frac{1}{z^2+1}\, dz = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan z\Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\pi}{2}.$$

Un terzo modo di calcolare l'integrale è il seguente:

$$\int_{\sqrt{2}}^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x^2-2}}\, dx = \int_{\sqrt{2}}^{+\infty} \frac{dx}{x^2\sqrt{1-2/x^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2\sqrt{1-1/t^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{1}{t}\Big|_1^{+\infty} = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\pi}{2}.$$

**Esercizio facoltativo.** Sia $x_0 \in \mathbb{R}$ e si definisca la successione $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ ponendo

$$a_0 = x_0 \text{ e, per ogni } n \geq 1,\ a_{n+1} = \sin a_n.$$

a) Dimostrare che $a_n$ è definitivamente monotona per $n \to +\infty$;
b) dimostrare che $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$.
*Svolgimento.* a) Per $n \geq 1$ si ha $|a_n| = |\sin(a_{n-1})| \leq 1$. Se $a_1 \in [0,1]$, allora da $\sin x \leq x\ \forall x \geq 0$ si ricava $a_{n+1} = \sin a_n \leq a_n$ e dunque la successione è definitivamente decrescente. Se invece $a_1 \in [-1, 0]$ si ottiene che la successione è definitivamente crescente.
b) In ogni caso la successione ha un limite $\ell \in [-1, 1]$. Se per assurdo fosse $\ell \neq 0$ si avrebbe, essendo la funzione seno continua,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{|\sin \ell|}{|\ell|} < 1,$$

il che implicherebbe la convergenza della serie $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$, il che a sua volta implicherebbe che $a_n$ converge a 0, cosicché $0 = \ell \neq 0$. Dunque $\ell = 0$. In alternativa, sempre per la continuità di sin,

$$\ell = \lim a_{n+1} = \lim \sin a_n = \sin \ell$$

che ha $\ell = 0$ come unica soluzione.

## Appello del 16.02.2018

### TEMA 1

**Esercizio 1** Si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^{x-\frac{1}{|x-2|}} & \text{per } x \neq 2 \\ 0 & \text{per } x = 2. \end{cases}$$

i) Determinare il dominio $D$ di $f$, le sue eventuali simmetrie e studiarne il segno; determinare i limiti di $f$ agli estremi di $D$ e gli eventuali asintoti;
ii) si dica se $f$ è continua in tutto $\mathbb{R}$.
iii) calcolare la derivata e studiare la monotonia di $f$ e determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto; calcolare i limiti significativi di $f'$; in particolare si dica se $f$ è derivabile in tutto $\mathbb{R}$; NON è richiesta la derivata seconda;
iv) disegnare un grafico qualitativo di $f$.
*Svolgimento.* i)DOMINIO: $|x-2| \neq 0 \iff x \neq 2$, dunque $D = \mathbb{R}\backslash\{2\} \cup \{2\} = \mathbb{R}$
LIMITI:

$$\lim_{x\to 2} f(x) = e^2 \cdot e^{-\infty} = e^2 \cdot 0 = 0 \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = e^{+\infty} = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = e^{-\infty} = 0$$

ASINTOTI

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)/x = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

dunque non ci sono asintoti obliqui.

ii) CONTINUITÀ: La funzione è continua in $\mathbb{R}\backslash\{2\}2$ perchè composizione di continue. È continua anche per $x = 2$ poichè $\lim_{x\to 2} = 0 = f(2)$. Dunque $f$ è continua.

iii) se $x > 2$ si ha

$$f'(x) = \left(e^{x-\frac{1}{x-2}}\right)\left(1 + \frac{1}{(x-2)^2}\right);$$

se $x < 2$ si ha

$$f'(x) = \left(e^{x+\frac{1}{x-2}}\right)\left(1 - \frac{1}{(x-2)^2}\right).$$

Dunque $f'(x) \geq 0$ se

$$\begin{cases} x > 2 \\ 1 + \frac{1}{(x-2)^2} \geq 0 \end{cases} \bigcup \begin{cases} x < 2 \\ 1 - \frac{1}{(x-2)^2} \geq 0 \end{cases}$$

cioè se

$$\begin{aligned} x \in ]2, +\infty[ &\bigcup \left(]-\infty, 2[ \bigcap \{x : \ (x-2)^2 \geq 1\}\right) \\ = ]2, +\infty[ &\bigcup \left(]-\infty, 2[ \bigcap \{x : \ (x-2) \leq -1 \text{ oppure } \ (x-2) \geq 1\}\right) \end{aligned}$$

cioè se

$$x \in ]2, +\infty[ \bigcup ]-\infty, 1].$$

Inoltre, poichè

$$\lim_{x\to 2-} f'(x) = \lim_{x\to 2-} \left(e^{x+\frac{1}{x-2}}\right)\left(1 - \frac{1}{(x-2)^2}\right) = -e^2 \lim_{x\to 2-} \frac{e^{\frac{1}{x-2}}}{(x-2)^2} = 0,$$

$$\lim_{x\to 2+} f'(x) = \lim_{x\to 2+} \left(e^{x-\frac{1}{x-2}}\right)\left(1 + \frac{1}{(x-2)^2}\right) = -e^2 \lim_{x\to 2+} \frac{e^{-\frac{1}{x-2}}}{(x-2)^2} = 0$$

si ha che $f$ è derivabile in $x = 2$ e $f'(2) = 0$. Concludendo, $f$ è derivabile su tutto il dominio $D = \mathbb{R}$, anzi è di classe $C^1$.

Dallo studio della monotonia $f$ ha un massimo relativo in $x = 1$ e un minimo assoluto in $x = 0$.

iv) Il grafico è in figura 6.

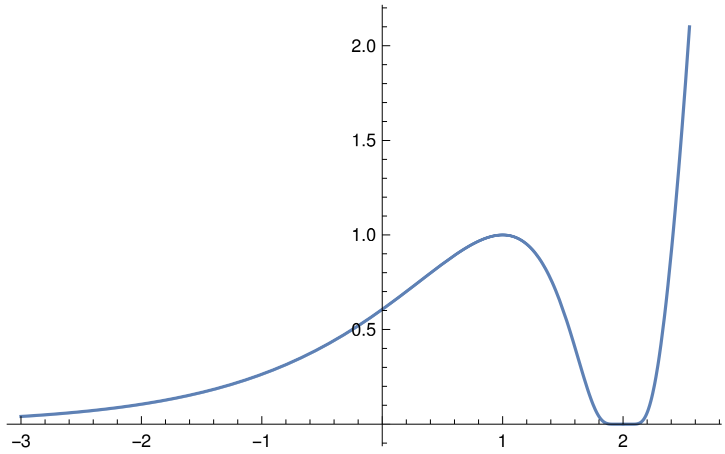



Figura 6: Il grafico di $f$ (Tema 1).

**Esercizio 2** Studiare al variare di $x \in \mathbb{R}$ la convergenza semplice ed assoluta della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x-1)^n}{(2n+3)^2}.$$

*Svolgimento.* Studiamo la convergenza assoluta con il criterio della rapporto

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|2x-1|^{n+1}}{(2n+5)^2} \frac{(2n+3)^2}{|2x-1|^n} = |2x-1| \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+3)^2}{(2n+5)^2} = |2x-1|$$

o, alternativamente, con criterio della radice

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{|2x-1|^n}{(2n+3)^2}} = \lim_{n\to\infty} |2x-1| \sqrt[n]{\frac{1}{(2n+3)^2}} = |2x-1|.$$

Pertanto la serie converge assolutamente –e quindi converge– per $0 < x < 1$ e diverge assolutamente e non converge (perché il termine generale non è infinitesimo) per $x < 0$ e per $x > 1$. Per $x = 0$ e $x = 1$ il criterio della radice e del rapporto non danno informazioni. Per $x = 0$, $x = 1$ la serie diventa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2x-1)^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2x-1)^2},$$

rispettivamente, e dunque converge assolutamente, e quindi semplicemente, per confronto asintotico con la serie convergente

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Per $0 \leq x < 1/2$ la convergenza semplice si può anche dedurre dal criterio di Leibniz.

**Esercizio 4**
a) Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{(4\cos x - \alpha)^2 - 4x^4}{x^4 \sin^2 x}$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.
*Svolgimento.* Il denominatore è asintotico a $x^6$ per $x \to 0$. Il numeratore: si ha, per $x \to 0$,

$$\begin{aligned}
(4\cos x - \alpha)^2 - 4x^4 &= \big(4 - \alpha - 2x^2 + \frac{x^4}{6} + o(x^4)\big)^2 - 4x^4 \\
&= \begin{cases} 4 - \alpha + o(1) & \text{per } \alpha \neq 4 \\ 4x^4 - \frac{2x^6}{3} - 4x^4 + o(x^6) & \text{per } \alpha = 4 \end{cases} \\
&= \begin{cases} 4 - \alpha + o(1) & \text{per } \alpha \neq 4 \\ -\frac{2x^6}{3} + o(x^6) & \text{per } \alpha = 4. \end{cases}
\end{aligned}$$

Si ha pertanto

$$\lim_{x\to 0} \frac{4(\cos x - \alpha)^2 - x^4}{x^4 \sin^2 x} = \begin{cases} +\infty & \text{per } \alpha \neq 4 \\ -\frac{2}{3} & \text{per } \alpha = 4. \end{cases}$$

**Esercizio 5** a) Studiare la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_0^{\frac{\pi^2}{3}} x^\alpha \sin(\sqrt{3x})\, dx$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$;
b) calcolarlo per $\alpha = \frac{1}{2}$.
*Svolgimento.* a) L'integranda $g(x)$ è continua nell'intervallo di integrazione, escluso al più il primo estremo. Per $x \to 0^+$ si ha

$$g(x) \sim \sqrt{3}\, x^{\alpha + \frac{1}{2}}.$$

L'integrale è convergente se e solo se l'esponente è maggiore di $-1$, cioè se e solo se $\alpha > -\frac{3}{2}$.
b) Si ha, con la sostituzione $3x = t^2$, che dà $dx = \frac{2}{3} t\, dt$,

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi^2}{3}} x^{\frac{1}{2}} \sin\left(\sqrt{3x}\right) dx &= \frac{2}{3\sqrt{3}} \int_0^{\pi} t^2 \sin t\, dt \\
\text{(per parti)} &= \frac{2}{3\sqrt{3}} \Big( - t^2 \cos t \Big|_0^{\pi} + 2 \int_0^{\pi} t \cos t\, dt \Big) \\
\text{(per parti)} &= \frac{2}{3\sqrt{3}} \pi^2 + \frac{2}{3\sqrt{3}} \Big( 2t \sin t \Big|_0^{\pi} - 2 \int_0^{\pi} \sin t\, dt \Big) \\
&= \frac{2}{3\sqrt{3}} \big(\pi^2 - 4\big).
\end{aligned}$$

**Appello del 9.07.2018**

**TEMA 1**

**Esercizio 1** Si consideri la funzione

$$f(x) = \log \left|2 - 3e^{3x}\right| .$$

i) Si determini il dominio $D$ e si studi il segno di $f$;
ii) si determininio i limiti di $f$ agli estremi di $D$ e gli eventuali asintoti;
iii) si calcoli la derivata e si studi la monotonia di $f$, determinandone gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto; non è richiesta la derivata seconda;
iv) si disegni un grafico qualitativo di $f$.

*Svolgimento.* i) Il dominio di $f$ è dato dalla condizione $3e^{3x} \neq 2$, cioè

$$D = \{x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{\log \frac{2}{3}}{3}\}.$$

Il segno di $f$ è positivo se e solo se $|2-3e^{3x}| > 1$. Elevando al quadrato si ottiene la disequazione equivalente

$$9e^{6x} - 12e^{3x} + 3 > 0.$$

Ponendo $e^{3x} = y$ e dividendo per 3, si ottiene la disequazione $3y^2 - 4y + 1 > 0$, che ha per soluzioni $y < 1/3$, $y > 1$. Perciò $f(x) \geq 0$ se e solo se

$$x \leq \frac{-\log 3}{3} \quad \text{oppure} \quad x \geq 0.$$

In alternativa: se $2 - 3e^{3x} \geq 0$, si ha:

$$|2 - 3e^{3x}| > 1 \iff 2 - 3e^{3x} > 1 \iff e^{3x} < \frac{1}{3} \iff x < \frac{1}{3}\log(\frac{1}{3}) = -\frac{1}{3}\log 3.$$

Se invece $2 - 3e^{3x} < 0$:

$$|2 - 3e^{3x}| > 1 \iff 3e^{3x} - 2 > 1 \iff e^{3x} > 1 \iff x > \frac{1}{3}\log(1) = 0.$$

Perciò $f(x) \geq 0$ se e solo se

$$x \leq \frac{-\log 3}{3} \quad \text{oppure} \quad x \geq 0.$$

ii) Si ha

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \log\left(2 - 3e^{3x}\right) = \log 2,$$

perché $\lim_{x\to-\infty} e^{3x} = 0$, quindi la retta $y = \log 2$ è un asintoto orizzontale. Inoltre

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \log\left(3e^{3x} - 2\right) = +\infty,$$

e

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\log\left(3e^{3x} - 2\right)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x + \log\left(3 - 2e^{-3x}\right)}{x} = 3,$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - 3x = \lim_{x\to+\infty} \log\left(3 - 2e^{-3x}\right) = \log 3.$$

Quindi la retta $y = 3x + \log 3$ è asintoto obliquo per $x \to +\infty$.
Infine,

$$\lim_{x \to \frac{\log \frac{2}{3}}{3}} f(x) = \lim_{y \to 0^+} \log y = -\infty,$$

perciò $x = \frac{\log \frac{2}{3}}{3}$ è un asintoto verticale.
(iii) Le regole di derivazione possono essere applicate in tutto $D$, perché il punto nel quale l'argomento del modulo si annulla non appartiene al dominio. Ricordando che $\frac{d}{dx} \log |g(x)| = \frac{g'(x)}{g(x)}$ dove $g(x) \neq 0$, si ha per ogni $x \in D$

$$f'(x) = \frac{9e^{3x}}{3e^{3x} - 2}.$$

Siccome il numeratore è sempre positivo, $f'(x) > 0$, e quindi $f$ è crescente, se e solo se $x > \frac{\log \frac{2}{3}}{3}$. Non ci sono punti di estremo.
(iv) Il grafico è in figura 7.

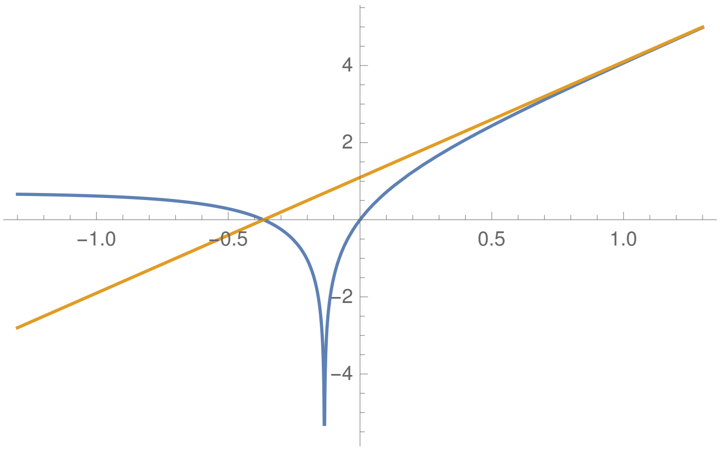



Figura 7: Il grafico di $f$ (Tema 1).

**Esercizio 3** Calcolare il limite

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\left(\log(1+x) - \log x - \frac{\alpha}{x}\right)^2}{\left(1 - \cos \frac{1}{x}\right)^2 + e^{-x}}$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.
*Svolgimento.* Per $x \to +\infty$ si ha

$$\log(1+x) - \log x - \frac{\alpha}{x} = \log x + \log\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \log x - \frac{\alpha}{x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} - \frac{\alpha}{x} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) = \begin{cases} \frac{1-\alpha}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) & \text{per } \alpha \neq 1 \\ -\frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) & \text{per } \alpha = 1. \end{cases}$$

Si ha perciò, per $x \to +\infty$,

$$\left(\log(1+x) - \log x - \frac{\alpha}{x}\right)^2 = \begin{cases} \frac{(1-\alpha)^2}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) & \text{per } \alpha \neq 1 \\ \frac{1}{4x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right) & \text{per } \alpha = 1. \end{cases}$$

Per il denominatore si ha

$$\left(1-\cos\frac{1}{x}\right)^2+e^{-x}=\left(\frac{1}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)^2+e^{-x}=\frac{1}{4x^4}+o\left(\frac{1}{x^4}\right),$$

poiché $e^{-x}=o\left(\frac{1}{x^n}\right)$ per $x\to+\infty$ qualunque sia $n>0$. Quindi si ha

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\log(1+x)-\log x-\frac{\alpha}{x}\right)^2}{\left(1-\cos\frac{1}{x}\right)^2+e^{-x}}=\begin{cases}+\infty & \text{per } \alpha\neq 1\\ 1 & \text{per } \alpha=1.\end{cases}$$

**Esercizio 4** Studiare al variare di $\alpha\in\mathbb{R}$ la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\arctan\left(\frac{2^{\alpha n}}{n}\right).$$

*Svolgimento.* La serie è a termini positivi. Osserviamo innanzitutto che per $\alpha>0$ il termine generale non è infinitesimo, in quanto $\lim_{n\to\infty}2^{\alpha n}/n=+\infty$, per cui $\lim_{n\to\infty}\arctan\left(\frac{2^{\alpha n}}{n}\right)=\pi/2$, e quindi

$$\lim_{n\to\infty} n\arctan\left(\frac{2^{\alpha n}}{n}\right)=+\infty.$$

Quindi per $\alpha>0$ la serie diverge. Per $\alpha\leq 0$ conviene usare il criterio del confronto asintotico, che dice che la serie ha lo stesso carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\frac{2^{\alpha n}}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}2^{\alpha n}.$$

Quest'ultima è la serie geometrica di ragione $2^{\alpha}$, che converge se e solo se $2^{\alpha}<1$, quindi se e solo se $\alpha<0$.

**Esercizio 5** a) Calcolare una primitiva di

$$f(x)=\frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+2)}$$

(sugg.: cercare una decomposizione dell'integrando del tipo $\frac{A}{x^2+1}+\frac{B}{x^2+2}$).
b) Studiare la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_0^{+\infty}\log\frac{x^{\alpha}+2}{x^{\alpha}+1}\,dx.$$

al variare di $\alpha>0$.
c) Calcolarlo per $\alpha=2$.
*Svolgimento.* a) Si ha

$$\frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+2)}=\frac{A}{x^2+1}+\frac{B}{x^2+2}=\frac{x^2(A+B)+2A+B}{(x^2+1)(x^2+2)},$$

da cui

$$A+B=1,\ 2A+B=0,\quad \text{cioè } A=-1, B=2.$$

Perciò

$$\int f(x)\,dx = \int \Big(\frac{-1}{x^2+1} + \frac{2}{x^2+2}\Big)\,dx = -\arctan x + \int \frac{1}{\big(\frac{x}{\sqrt{2}}\big)^2+1}dx$$
$$= -\arctan x + \sqrt{2}\int \frac{1}{t^2+1}\,dt = -\arctan x + \sqrt{2}\arctan\frac{x}{\sqrt{2}} + k, k\in\mathbb{R}.$$

b) L'integrando è continuo in $[0,+\infty[$, per cui bisogna controllare la convergenza dell'integrale solo per $x\to+\infty$. Siccome l'integrando è positivo, usiamo il criterio del confronto asintotico. Si ha

$$\log\frac{x^\alpha+2}{x^\alpha+1} = \log\Big(1+\frac{2}{x^\alpha}\Big) - \log\Big(1+\frac{1}{x^\alpha}\Big) = \frac{1}{x^\alpha} + o\Big(\frac{1}{x^\alpha}\Big)$$

per $x\to+\infty$. Quindi l'integrale converge se e solo se $\alpha>1$.
c) Integrando per parti risulta

$$\int_0^c \log\frac{x^2+2}{x^2+1}\,dx = x\log\frac{x^2+2}{x^2+1}\Big|_0^c - \int_0^c x\frac{x^2+1}{x^2+2}\frac{2x(x^2+1)-2x(x^2+2)}{(x^2+1)^2}\,dx$$
$$= c\log\frac{c^2+2}{c^2+1} - \int_0^c \frac{-2x^2}{(x^2+2)(x^2+1)}\,dx = \quad \text{[tenendo conto del calcolo fatto in a)]}$$
$$= c\log\frac{c^2+2}{c^2+1} + 2\Big(-\arctan c + \sqrt{2}\arctan\frac{c}{\sqrt{2}}\Big).$$

Perciò

$$\int_0^{+\infty}\log\frac{x^2+2}{x^2+1}\,dx = \lim_{c\to+\infty}\left(c\log\frac{c^2+2}{c^2+1} + 2\Big(-\arctan c+\sqrt{2}\arctan\frac{c}{\sqrt{2}}\Big)\right) = \pi(\sqrt{2}-1),$$

in quanto

$$\lim_{c\to+\infty} c\log\frac{c^2+2}{c^2+1} = \lim_{c\to+\infty} c\left(\frac{1}{c^2} + o\Big(\frac{1}{c^2}\Big)\right) = 0.$$

## Appello del 17.09.2018

### TEMA 1

**Esercizio 1** Si consideri la funzione

$$f(x) := \begin{cases} e^{-\frac{2}{|x|}}\big(2|x|-3\big) & \text{per } x\neq 0\\ 0 & \text{per } x=0.\end{cases}$$

i) Determinare il dominio $D$, le eventuali simmetrie e studiare il segno di $f$;
ii) determinare i limiti di $f$ agli estremi di $D$ e gli eventuali asintoti;
iii) calcolare la derivata e studiare la monotonia di $f$ e determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto; non è richiesta la derivata seconda;
iv) studiare la continuità e (facoltativo) la derivabilità di $f$ (in particolare in $x=0$);
v) disegnare un grafico qualitativo di $f$.
*Svolgimento.* i) $D=\mathbb{R}$, ovviamente e la funzione è pari. Si ha

$$f(x)\geq 0 \;\text{ se e solo se }\; |x|\geq\frac{3}{2} \text{ oppure } x=0.$$

D'ora in poi studiamo $f$ per $x \geq 0$.
ii) Si ha

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} e^{-\frac{2}{x}}\big(2x-3\big) = +\infty.$$

Per il calcolo dell'asintoto si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} e^{-\frac{2}{x}}\frac{2x-3}{x} = 2$$

e

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - 2x = \lim_{x\to+\infty} \Big(2x\big(e^{-\frac{2}{x}}-1\big) - 3e^{-\frac{2}{x}}\Big) = \lim_{x\to+\infty} \left(2x\Big(-\frac{2}{x}+o\big(\frac{1}{x}\big)\Big) - 3e^{-\frac{2}{x}}\right) = -7,$$

per cui la retta $y = 2x - 7$ è asintoto obliquo per $x \to +\infty$.
iii) Per $x > 0$ si possono applicare le regole di derivazione, dato che si ha $f(x) = e^{-\frac{2}{x}}(2x-3)$. Perciò

$$f'(x) = 2e^{-\frac{2}{x}} + \frac{2e^{-\frac{2}{x}}}{x^2}(2x-3) = \frac{2e^{-\frac{2}{x}}}{x^2}(x^2+2x-3).$$

Si ha pertanto che $f'(x) \geq 0$ se e solo se $x^2 + 2x - 3 \geq 0$, cioè (per $x > 0$) se e solo se $x \geq 1$. Pertanto $x = 1$ è il punto di minimo assoluto, ed è un minimo stretto, mentre $x = 0$ è un punto di massimo relativo stretto, in quanto $f(x) < 0 = f(0)$ per $0 < |x| < \frac{3}{2}$ (mostrato in (i)).
iv) La funzione è continua in $]0, +\infty[$ in quanto composizione di funzioni elementari. Per studiare la continuità in 0 bisogna calcolare

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} e^{-\frac{2}{x}}(2x-3) = -3\lim_{x\to0^+} e^{-\frac{2}{x}} = 0 = f(0).$$

Pertanto $f$ è continua anche in $x = 0$. Per studiare la derivabilità in $x = 0$ si può calcolare il limite

$$\lim_{x\to0^+} f'(x) = \lim_{x\to0^+} \frac{2e^{-\frac{2}{x}}}{x^2}(x^2+2x-3) = -3\lim_{x\to0^+} \frac{2e^{-\frac{2}{x}}}{x^2} = 0$$

per il noto confronto tra esponenziali e potenze. Pertanto $f$ è derivabile anche in $x = 0$ (e la derivata è continua anche in $x = 0$).
v) Il grafico di $f$ è in figura 8.

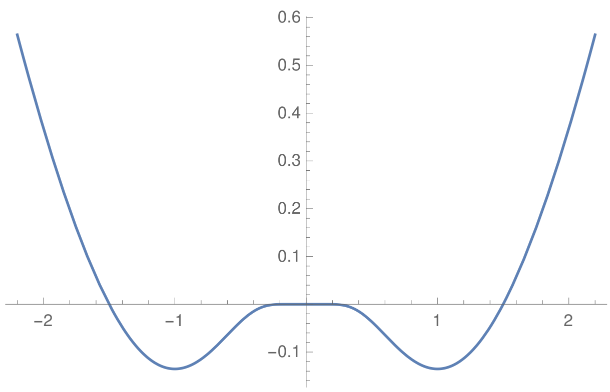



Figura 8: Il grafico di $f$ (Tema 1).

**Esercizio 3** Discutere al variare del parametro reale $\alpha$ la convergenza della serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log(n+\sin n)}{n^{\frac{\alpha}{2}}+2}$$

*Svolgimento.* La serie è a termini positivi e si può quindi usare il criterio del confronto asintotico. Si ha

$$\log\big(n+\sin n\big) \sim \log n \text{ per } n \to \infty,$$

perché

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log\big(n+\sin n\big)}{\log n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\log n + \log\Big(1+\frac{\sin n}{n}\Big)}{\log n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\log n + \frac{\sin n}{n} + o\Big(\frac{1}{n}\Big)}{\log n} = 1.$$

Inoltre

$$\frac{1}{n^{\frac{\alpha}{2}}+2} \sim \frac{1}{n^{\frac{\alpha}{2}}} \text{ per } n \to \infty.$$

La serie converge perciò se e solo se converge la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^{\frac{\alpha}{2}}}.$$

Quest'ultima converge se e solo se $\frac{\alpha}{2} > 1$, cioè se e solo se $\alpha > 2$. Infatti, se $\frac{\alpha}{2} \leq 1$, il termine generale della serie è $\geq \frac{1}{n}$ e quindi la serie diverge. Se invece $\frac{\alpha}{2} > 1$ e scelgo $1 < \beta < \frac{\alpha}{2}$, allora, per $n \to \infty$,

$$\frac{\log n}{n^{\frac{\alpha}{2}}} = o\Big(\frac{1}{n^\beta}\Big),$$

dal limite fondamentale

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{n^\gamma} = 0 \text{ per ogni } \gamma > 0$$

e la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\beta}$ converge.

**Esercizio 4** Calcolare al variare di $\alpha \in \mathbb{R}^+$ il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x - \sinh x - x^\alpha}{\cos x - 1 + x^{\frac{7}{3}} \log x}.$$

*Svolgimento.* Si ha, per $x \to 0^+$,

$$x - \sinh x - x^\alpha = -\frac{x^3}{6} + o(x^3) - x^\alpha \sim \begin{cases} -x^\alpha & \text{se } \alpha < 3 \\ -\frac{7}{6}x^3 & \text{se } \alpha = 3 \\ -\frac{x^3}{6} & \text{se } \alpha > 3 \end{cases}$$

$$\cos x - 1 + x^{\frac{7}{3}} \log x = -\frac{x^2}{2} + o(x^2) + x^{\frac{7}{3}} \log x = -\frac{x^2}{2} + o(x^2) \sim -\frac{x^2}{2}$$

in quanto

$$\lim_{x\to 0+} \frac{x^{\frac{7}{3}} \log x}{x^2} = \lim_{x\to 0+} \sqrt[3]{x} \log x = 0.$$

Quindi,

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x - \sinh x - x^\alpha}{\cos x - 1 + x^{\frac{7}{3}} \log x} = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha < 2 \\ 2 & \text{se } \alpha = 2 \\ 0 & \text{se } \alpha > 2. \end{cases}$$

**Esercizio 5** Dato l'integrale

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} x^{\frac{\alpha}{2}} \arcsin 2x^2\, dx,$$

a) studiarne la convergenza al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$;
b) calcolarlo per $\alpha = 2$.
*Svolgimento.* a) L'integrando $g(x) = x^{\frac{\alpha}{2}} \arcsin 2x^2$ è positivo, per cui si può usare il criterio del confronto asintotico. Si ha, per $x \to 0^+$,

$$g(x) \sim 2x^{\frac{\alpha}{2}+2},$$

per cui l'integrale converge se e solo se $\frac{\alpha}{2} + 2 > -1$, cioè se e solo se $\alpha > -6$.
b) Si ha

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} x \arcsin 2x^2\, dx &= \text{(per parti)}\ \ \frac{x^2}{2} \arcsin 2x^2 \Big|_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} - \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{x^2}{2} \frac{4x}{\sqrt{1-4x^4}}\, dx \\ &= \frac{\pi}{8} - \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{2x^3}{\sqrt{1-4x^4}}\, dx = \frac{\pi}{8} + \frac{\sqrt{1-4x^4}}{4}\Big|_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

## Appello del 21.01.2019

### TEMA 1

**Esercizio 1** Si consideri la funzione

$$f(x) = e^{\frac{|x^2-16|}{x+3}}, \qquad x \in D = ]-\infty, -3[.$$

i) determinare i limiti di $f$ agli estremi di $D$ e gli eventuali asintoti; studiarne la prolungabilità per continuità in $x = -3$;
ii) studiarne la derivabilità, calcolarne la derivata, studiarne la monotonia e determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto.

*Svolgimento.*
i) Osserviamo che

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{|x^2-16|}{x+3} = -\infty, \qquad \lim_{x\to-3^-} \frac{|x^2-16|}{x+3} = -\infty$$

quindi con un cambio di variabile

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{y\to-\infty} e^y = 0, \qquad \lim_{x\to-3^-} f(x) = \lim_{y\to-\infty} e^y = 0.$$

In particolare $f$ ha un asintoto orizzontale ($y = 0$) per $x \to -\infty$. Inoltre $f$ può essere prolungata come funzione continua da sinistra in $-3$ ponendo $f(-3) = 0$.

ii) Calcoliamo, per $x \neq -4$,

$$\begin{aligned}f'(x) &= e^{\frac{|x^2-16|}{x+3}} \frac{d}{dx} \frac{|x^2-16|}{x+3} = e^{\frac{|x^2-16|}{x+3}} \frac{\operatorname{sgn}(x^2-16) 2x(x+3) - |x^2-16|}{(x+3)^2} \\ &= e^{\frac{|x^2-16|}{x+3}} \operatorname{sgn}(x^2-16) \frac{2x(x+3) - (x^2-16)}{(x+3)^2} \\ &= e^{\frac{|x^2-16|}{x+3}} \operatorname{sgn}(x^2-16) \frac{x^2+6x+16}{(x+3)^2},\end{aligned}$$

dove "sgn" indica la funzione segno.

Osservando che $e^{\frac{|x^2-16|}{x+3}} > 0$ e $(x+3)^2 > 0$ per ogni $x \in D$, vogliamo valutare il segno di

$$(x^2 + 6x + 16)\mathrm{sgn}\,(x^2 - 16)$$

Calcolando il discriminante di $x^2 + 6x + 16$, $\Delta = 36 - 64 < 0$ si ottiene che $x^2 + 6x + 16 > 0$ per ogni $x$. Inoltre

$$\mathrm{sgn}\,(x^2 - 16) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 16 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad |x| > 4 \quad \Leftrightarrow \quad x < -4 \text{ o } x > 4.$$

Poiché ci interessano solo i valori di $x \in D$, ovvero $x < -3$, otteniamo $\mathrm{sgn}\,(x^2 - 16) > 0$ per $x < -4$ e $\mathrm{sgn}\,(x^2 - 16) < 0$ per $-4 < x < -3$. Ne risulta

$$f'(x) > 0 \text{ (e quindi } f \text{ crescente) per } x < -4, \quad f'(x) < 0 \text{ (e quindi } f \text{ decrescente) per } x \in ]-4, -3[,$$

da cui segue che $-4$ é un punto massimo assoluto e per il teorema di Fermat, non possono esservi altri punti di estremo.

Infine $x = -4$ è l'unico punto in cui $f$ risulta non derivabile (è un punto angoloso) perché

$$\lim_{x \to -4^+} f'(x) = -8 = - \lim_{x \to -4^-} f'(x).$$

Il grafico di $f$ è in figura 9.

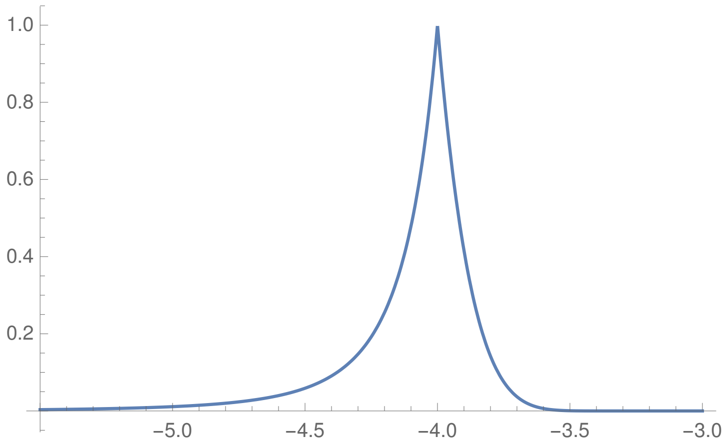



Figura 9: Il grafico di $f$ (Tema 1).

**Esercizio 2** Calcolare il limite

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{e^{2x} - 1 - \sin(2x)}{\sinh^2 x + x^{\frac{9}{2}}}.$$

*Svolgimento.* Usando gli sviluppo di Taylor $e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2} + o(y^2)$, $\sin y = y + o(y^2)$ con $y = 2x$ otteniamo

$$e^{2x} = 1 + 2x + 2x^2 + o(x^2), \quad \sin 2x = 2x + o(x^2), \quad \text{per } x \to 0$$

e pertanto il numeratore può essere scritto come

$$e^{2x} - 1 - \sin 2x = 2x^2 + o(x^2) \quad \text{per } x \to 0$$

Scrivendo $\sinh x = x + o(x)$ abbiamo $\sinh^2 x = (x + o(x))^2 = x^2 + o(x^2)$ per $x \to 0$. Inoltre, essendo $\frac{9}{2} > 2$, vale $x^{\frac{9}{2}} = o(x^2)$ per $x \to 0$. Ne segue

$$\sinh^2 x + x^{\frac{9}{2}} = x^2 + o(x^2).$$

Da cui

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x} - 1 - \sin 2x}{\sinh^2 x + x^{\frac{9}{2}}} = \lim_{x\to 0} \frac{2x^2 + o(x^2)}{x^2 + o(x^2)} = 2.$$

**Esercizio 4**

Siano $\alpha \in \mathbb{R}$ fissato e

$$f(t) := \frac{\log\left(1 + \frac{t}{2}\right)}{t^{2\alpha}}.$$

i) Calcolare $\int_1^2 f(t)\,dt$ con $\alpha = 1$.

ii) Sia $F(x) := \int_2^x f(t)\,dt$ con $\alpha = \frac{1}{2}$. Scrivere la formula di Taylor del secondo ordine per $F$ centrata in $x = 2$.

iii) Determinare per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ esiste finito $\int_0^1 f(t)\,dt$.

*Svolgimento.* i) Integriamo per parti e otteniamo

$$\int_1^2 \frac{\log\left(1 + \frac{t}{2}\right)}{t^2} dt = -\frac{\log\left(1 + \frac{t}{2}\right)}{t}\Big|_1^2 + \int_1^2 \frac{1}{t(2+t)} dt = -\frac{\log 2}{2} + \log\frac{3}{2} + \int_1^2 \frac{1}{t(2+t)} dt$$

Per calcolare il secondo integrale usiamo il metodo dei fratti semplici: poniamo

$$\frac{1}{t(2+t)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{2+t} = \frac{2A + At + Bt}{t(2+t)},$$

da cui $A = \frac{1}{2}$ e $B = -\frac{1}{2}$. In conclusione

$$\int_1^2 \frac{1}{t(2+t)} dt = \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{1}{t} dt - \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{1}{2+t} dt = \frac{1}{2}\big(\log t - \log(2+t)\big)\Big|_1^2 = \frac{1}{2}\log\frac{3}{2}.$$

In conclusione

$$\int_1^2 \frac{\log\left(1 + \frac{t}{2}\right)}{t^2} dt = -\frac{\log 2}{2} + \log\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\log\frac{3}{2} = \log\frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

ii) Il polinomio di Taylor è

$$T_F^{2,2}(x) = F(2) + F'(2)(x-2) + \frac{F''(2)}{2}(x-2)^2,$$

pertanto devo calcolare

$$F(0) = 0$$

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\int_1^x f(t)dt = f(x) = \frac{\log\left(1 + \frac{x}{2}\right)}{x} \quad\Rightarrow\quad F'(2) = \frac{\log 2}{2},$$

e

$$F''(x) = f'(x) = \frac{\frac{1}{2+x}x - \log(1 + \frac{x}{2})}{x^2} \quad\Rightarrow\quad F''(2) = \frac{1}{8} - \frac{\log 2}{4}.$$

Ne segue

$$f(x) = \frac{\log 2}{2}(x-2) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{8} - \frac{\log 2}{4}\right)(x-2)^2 + o(x-2)^2$$

per $x \to 2$.

iii) Osserviamo che per $\alpha \leq 0$ la funzione $f$ è palesemente continua e limitata su $[0,1]$, per cui l'integrale esiste finito. Per $\alpha > 0$ dobbiamo valutare il comportamento asintotico di $f(t)$ per $t \to 0^+$, essendo comunque $f$ continua e limitata su ogni intervallo $[\delta, 1]$ per ogni $0 < \delta < 1$. Abbiamo

$$f(t) = \frac{\log\left(1 + \frac{t}{2}\right)}{t^{2\alpha}} = \frac{\frac{t}{2} + o(t)}{t^{2\alpha}} \sim \frac{1}{2t^{2\alpha-1}}, \quad \text{per } t \to 0^+.$$

Per il criterio del confronto asintotico vale dunque

$$\int_0^1 f(t)dt \text{ converge } \Leftrightarrow \int_0^\delta \frac{1}{2t^{2\alpha-1}}dt \text{ converge per qualche } \delta > 0 \Leftrightarrow 2\alpha - 1 < 1.$$

Dunque l'integrale converge se e solo se $\alpha < 1$.

**Esercizio 5** Studiare la convergenza semplice ed assoluta della serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\log \alpha)^n}{1 + \sqrt{2n}}$$

al variare di $\alpha \in ]0, +\infty[$.

*Svolgimento.* Studiamo la convergenza della serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{y^n}{1 + \sqrt{2n}}.$$

Per $|y| < 1$ la serie converge assolutamente. Questo può essere facilmente provato usando il criterio della radice, essendo

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{|y|^n}{1 + \sqrt{2n}}\right)^{\frac{1}{n}} = |y| < 1$$

oppure osservando che $n|y|^n \to 0$ per $|y| < 1$, quindi $|y|^n \leq \frac{1}{n}$ definitivamente per $n \to \infty$ e visto che la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n(1 + \sqrt{2n})}$$

converge $\left(\frac{1}{n(1+\sqrt{2n})} \sim \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$ possiamo concludere usando il teorema del confronto.

Per $|y| > 1$ il termine generale della serie diverge, quindi la serie non può convergere.

Per $y = 1$ la serie diverge per confronto asintotico con la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2n}}$.

Infine, per $y = -1$ la serie converge per il criterio di Leibniz, essendo il modulo del termine generale della serie decrescente a 0. Tuttavia, per il caso precedente, la serie non converge assolutamente.

Sostituendo $\log \alpha = y$ otteniamo che la serie originale converge assolutamente se e solo se $-1 < \log \alpha < 1$, ovvero se e solo se $\frac{1}{e} < \alpha < e$, converge semplicemente se e solo se $-1 \leq \log \alpha < 1$, ovvero se e solo se $\frac{1}{e} \leq \alpha < e$ e diverge in tutti gli altri casi, ovvero $0 < \alpha < \frac{1}{e}$ e $\alpha \geq e$.

**Esercizio facoltativo** Determinare tutti i valori di $a \in \mathbb{R}$ tali che la funzione $f(x) = e^x - ax^3$ sia convessa in tutto $\mathbb{R}$.

*Svolgimento.* Da $f''(x) = e^x - 6ax$, si ha che $f$ è convessa se e solo se

**(A)** $f''(x) = e^x - 6ax \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$

Ora, se $a < 0$,

$$\lim_{x\to-\infty} f''(x) = \lim_{x\to-\infty} e^x - 66ax \geq 0 = -\infty$$

e dunque **(A)** non è verificato.

Se $a = 0$ invece **(A)** è verificato.

Se $a > 0$ studiamo la funzione $g(x) := f''(x) = e^x - 6ax$. Si ha $g'(x) = e^x - 6a \geq 0 \iff x \geq \log(6a)$. Dunque $g$ ha un minimo assoluto in $x = \log(6a)$. Perciò **(A)** è verificata se e solo se $g(\log(6a)) = 6a - 6a\log(6a) \geq 0$, cioè se e solo se $1 - 1\log(6a) \geq 0$, quindi se e solo se $a \leq \frac{e}{6}$.

In conclusione $f$ è convessa se e solo se $a \leq \frac{e}{6}$.

## Appello del 11.02.2019

### TEMA 1

**Esercizio 1.** Sia

$$f(x) = |(x+3)\log(x+3)|, \qquad x \in D = ]-3, +\infty[.$$

(i) Determinare i limiti di $f$ agli estremi di $D$ e gli eventuali asintoti; studiarne la prolungabilità per continuità in $x = -3$;

(ii) studiarne la derivabilità, calcolarne la derivata, studiarne la monotonia, determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto ed abbozzarne il grafico.

*Svolgimento.*

(i) Con il cambio di variabile $y = x + 3$ otteniamo

$$\lim_{x\to-3^+} f(x) = \lim_{y\to 0^+} |y\log y| = 0.$$

Questo in particolare implica che $f$ si può prolungare per continuità in $x = -3$ ponendo $f(-3) = 0$.

Evidentemente vale

$$\lim_{x\to\infty} |x+3| = \infty, \quad \lim_{x\to\infty} |\log(x+3)| = \infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty.$$

D'altronde

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{|x+3|}{x} |\log(x+3)| = 1 \cdot \lim_{x\to\infty} |\log(x+3)| = \infty,$$

quindi la funzione non ha un asintoto obliquo per $x \to \infty$.

(ii) Osserviamo che nel dominio $D$ la funzione $(x+3)\log(x+3)$ si annulla solo per $x + 3 = 1$, ovvero $x = -2$. Dunque in $D \setminus \{-2\}$ la funzione $f$ è derivabile in quanto prodotto e composizione di funzioni derivabili, e si calcola

$$f'(x) = \operatorname{sgn}((x+3)\log(x+3))((x+3)\log(x+3))' = \operatorname{sgn}((x+3)\log(x+3))(\log(x+3)+1),$$

ovvero

$$f'(x) = -(\log(x+3)+1) \text{ per } -3 < x < -2$$
$$f'(x) = \log(x+3) + 1 \text{ per } x > -2.$$

Si vede facilmente che $f'(x) > 0$ per ogni $x > -2$, quindi $f$ è strettamente monotona crescente per $x > -2$.

Per $-3 < x < -2$ vale

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \log(x+3) < -1 \Leftrightarrow x+3 < \frac{1}{e} \Leftrightarrow x < -3 + \frac{1}{e}.$$

Con analoghi calcoli si ha dunque che

$$f'(x) > 0 \text{ per } -3 < x < -3 + \frac{1}{e}, \quad f'(x) = 0 \text{ per } x = -3 + \frac{1}{e}, \quad f'(x) < 0 \text{ per } -3 + \frac{1}{e} < x < -2.$$

Ne segue che $f$ è strettamente monotona crescente per $-3 < x < -3 + \frac{1}{e}$ e strettamente monotona decrescente per $-3 + \frac{1}{e} < x < -2$.

Quindi $-3+\frac{1}{e}$ è un punto di massimo locale, mentre $-2$ è un punto di minimo assoluto (infatti $f(x) \geq 0$ per ogni $x \in D$ e $f(-2) = 0$).

Si può facilmente osservare che

$$\lim_{x \to -2^-} f'(x) = -1, \qquad \lim_{x \to -2^+} f'(x) = 1$$

e questo (per un teorema eventualmente visto a lezione) implica che $f$ non è derivabile per $x = -2$.

Il grafico di $f$ è in figura 10.

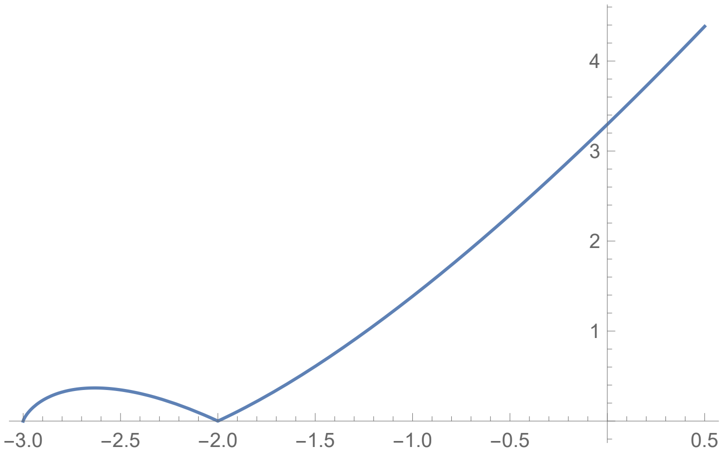



Figura 10: Il grafico di $f$ (Tema 1).

**Esercizio 2.** Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+n^2)\sin n}{n^4}$$

*Svolgimento.* Osserviamo che $|\sin n| \leq 1$ per ogni $n$, e quindi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(1+n^2)\sin n}{n^4} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} |\sin n| \left| \frac{1+n^2}{n^4} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n^2}{n^4}.$$

Poiché abbiamo

$$\frac{1+n^2}{n^4} \sim \frac{n^2}{n^4} = \frac{1}{n^2} \quad \text{per } n \to \infty,$$

o (equivalentemente) scrivendo

$$\frac{1+n^2}{n^4} = \frac{n^2(1+o(1/n^2))}{n^4} = \frac{1+o(1)}{n^2},$$

per il criterio di convergenza asintotico deduciamo che la serie a termini positivi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n^2}{n^4}$$

converge, e quindi per il principio del confronto la serie originale converge assolutamente.

**Esercizio 4.** Calcolare

$$\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{2x}}\, dx.$$

*Svolgimento.* Usando il cambio di variabile $\sqrt{2x} = y$, da cui $x = \frac{y^2}{2}$ e $dx = ydy$, otteniamo

$$\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{2x}}\, dx = \int_0^{+\infty} e^{-y} y\, dy.$$

Integrando per parti si ha

$$\int_0^{+\infty} e^{-y} y\, dy = \left[-e^{-y} y\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-y}\, dy = 0 + \left[-e^{-y}\right]_0^{+\infty} = 0 - (-1) = 1.$$

**Esercizio 5.** Sia

$$f_\alpha(x) = \frac{e^{-\sqrt{2x}} - 1}{x^{\alpha-1}}.$$

(a) Si studi la convergenza dell'integrale

$$\int_0^{+\infty} f_\alpha(x)\, dx$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.
(b) Per $\alpha = 2$, sia $F(x) = \int_1^{\cos x} f_\alpha(t)\, dt$: si calcoli $F'(\pi/3)$.

*Svolgimento.* (a) Osserviamo che la funzione $f_\alpha$ è continua per $0 < x < +\infty$. Consideriamo

$$\int_0^1 f_\alpha(x)\, dx. \tag{1}$$

Essendo $e^{-\sqrt{2x}} = 1 - \sqrt{2x} + o(\sqrt{x})$ per $x \to 0$, abbiamo

$$f_\alpha(x) = \frac{-\sqrt{2x} + o(\sqrt{x})}{x^{\alpha-1}} = \frac{-\sqrt{2} + o(1)}{x^{\alpha-\frac{3}{2}}} \sim \frac{-\sqrt{2}}{x^{\alpha-\frac{3}{2}}},$$

quindi, per il criterio di convergenza asintotico, l'integrale in (1) converge se e solo se

$$\int_0^1 \frac{-\sqrt{2}}{x^{\alpha-\frac{3}{2}}}\, dx$$

converge, ovvero (portando $-\sqrt{2}$ fuori dall'integrale) se e solo se $\alpha - \frac{3}{2} < 1$, quindi se e solo se $\alpha < \frac{5}{2}$.

Studiamo ora

$$\int_1^{+\infty} f_\alpha(x)\,dx. \tag{2}$$

Poichè $e^{-\sqrt{2x}} \to 0$ per $x \to \infty$ abbiamo

$$f_\alpha(x) \sim \frac{-1}{x^{\alpha-1}}$$

e per il criterio asintotico di convergenza, l'integrale in (2) converge se e solo se

$$\int_1^{+\infty} \frac{-1}{x^{\alpha-1}}\,dx.$$

converge, ovvero se e solo se $\alpha - 1 > 1$, quindi se e solo se $\alpha > 2$.

Quindi l'integrale originale converge se e solo se $2 < \alpha < \frac{5}{2}$.

(b) Scriviamo

$$G(y) = \int_1^y f_2(t)\,dt = \int_1^y \frac{e^{-\sqrt{2t}} - 1}{t}\,dt.$$

Per il teorema fondamentale del calcolo vale

$$G'(y) = f_2(y) = \frac{e^{-\sqrt{2y}} - 1}{y}.$$

Abbiamo $F(x) = G(\cos x)$. Per la regola della catena, quindi

$$F'(\pi/3) = G'(\cos(\pi/3))(-\sin(\pi/3)) = -\frac{\sqrt{3}}{2}G'(1/2) = -\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{e^{-1} - 1}{1/2} = -\sqrt{3}(1 - 1/e).$$

**Esercizio 6** Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\cosh(\alpha\, x) - \cosh\left(e^{2x} - 1\right)}{x^3}$$

al variare del parametro $\alpha > 0$.

*Svolgimento.* Ricordiamo che $\cosh y = 1 + \frac{y^2}{2} + o(y^2)$, ed $e^y = 1 + y + o(y)$ per $y \to 0$, dunque possiamo espandere il numeratore come

$$\begin{aligned}
\text{Num} &= 1 + \frac{\alpha^2 x^2}{2} + o(x^2) - \cosh\left(2x + o(x)\right) \\
&= 1 + \frac{\alpha^2 x^2}{2} + o(x^2) - \left[1 + \frac{(2x + o(x))^2}{2} + o((x + o(x))^2)\right] \\
&= 1 + \frac{\alpha^2 x^2}{2} + o(x^2) - \left[1 + 2x^2 + o(x^2)\right] \\
&= \frac{(\alpha^2 - 4)x^2}{2} + o(x^2).
\end{aligned}$$

Quindi

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\cosh(\alpha\, x) - \cosh\left(e^{2x} - 1\right)}{x^3} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{\alpha^2-4}{2} + o(1)}{x} = \begin{cases} -\infty & \text{per } 0 < \alpha < 2 \\ +\infty & \text{per } \alpha > 2. \end{cases}$$

Il caso $\alpha = 2$ risulta più difficile perché non è possibile calcolare $\lim_{x\to 0^+} \frac{o(1)}{x}$. Dobbiamo pertanto ottenere un'espansione del numeratore all'ordine successivo (il terzo). Questa volta scriviamo $\cosh y = 1 + \frac{y^2}{2} + o(y^3)$, ed $e^y = 1 + y + y^2 + o(y^2)$ per $y \to 0$. In particolare

$$\begin{aligned}\cosh(e^{2x} - 1) &= \cosh(2x + 2x^2 + o(x)^2)\\ &= 1 + \frac{(2x + 2x^2 + o(x)^2)^2}{2} + o((2x + 2x^2 + o(x)^2)^3)\\ &= 1 + \frac{4x^2 + 8x^3 + o(x^3)}{2} + o(x^3)\\ &= 1 + 2x^2 + 4x^3 + o(x^3).\end{aligned}$$

Per $\alpha = 2$ abbiamo $\cosh(\alpha x) = 1 + 2x^2 + o(x^3)$, quindi

$$\text{Num} = 1 + 2x^2 + o(x^3) - (1 + 2x^2 + 4x^3 + o(x^3)) = -4x^3 + o(x^3)$$

Pertanto

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\cosh(2x) - \cosh\left(e^{2x} - 1\right)}{x^3} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-4x^3 + o(x^3)}{x^3} = -4.$$

**Esercizio facoltativo.** Calcolare

$$\lim_{x\to +\infty} \int_x^{x+e^{-x}} e^t \arctan t \, dt.$$

*Svolgimento.* Essendo l'integranda continua in un intorno di $+\infty$ (in realtà in tutto $\mathbb{R}$), per il teorema del valor medio esiste $t_x \in [x, x + e^{-x}]$ tale che

$$\int_x^{x+e^{-x}} e^t \arctan t \, dt = e^{-x} e^{t_x} \arctan t_x$$

e quindi, siccome l'integrando è crescente,

$$e^{-x} e^x \arctan x \le e^{-x} e^{t_x} \arctan t_x \le e^{-x} e^{x+e^{-x}} \arctan\left(x + e^{-x}\right),$$

cioè

$$\arctan x \le \int_x^{x+e^{-x}} e^t \arctan t \, dt \le e^{e^{-x}} \frac{\pi}{2}.$$

Siccome

$$\lim_{x\to +\infty} e^{e^{-x}} = 1,$$

applicando il teorema dei Carabinieri si ottiene

$$\lim_{x\to +\infty} \int_x^{x+e^{-x}} e^t \arctan t \, dt = \frac{\pi}{2}.$$

## TEMA 1

**Esercizio 1 [6 punti]** Sia

$$f(x) = e^{\frac{2}{|2+\log x|}}.$$

a) Determinare il dominio $D$ di $f$; determinare i limiti di $f$ agli estremi di $D$ e studiare la prolungabilità per continuità di $f$ in $x = 0$;
b) studiare la derivabilità, calcolare la derivata e studiare la monotonia di $f$; determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto;
c) disegnare un grafico qualitativo di $f$.

*Svolgimento* (a) Essendo il dominio di $e^x$ tutto $\mathbb{R}$, ed il dominio di $\log x$ tutti gli $x > 0$, il dominio di $f$ è determinato dalle due condizioni:

$$x > 0, \quad 2 + \log x \neq 0.$$

La seconda relazione equivale a $x \neq e^{-2}$, quindi

$$D = \{x > 0 : x \neq e^{-2}\}.$$

Con tre cambi di variabile si ottiene

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{y\to -\infty} e^{\frac{2}{|2+y|}} = \lim_{s\to +\infty} e^{\frac{2}{s}} = \lim_{t\to 0^+} e^t = 1.$$

Dunque $f$ può essere estesa per continuità in 0 ponendo $f(0) = 1$.

Inoltre

$$\lim_{x\to e^{-2}} f(x) = \lim_{y\to 0^+} e^{\frac{2}{y}} = \lim_{s\to +\infty} e^s = +\infty.$$

Dunque $f$ non può essere estesa per continuità in $e^{-2}$.
(b) La funzione è derivabile in tutto il suo dominio, essendo composizione di funzioni derivabili (la funzione $|\cdot|$ non è derivabile solo in 0, ma $2 + \log x$ si annulla solo in $e^{-2}$, che non appartiene al dominio.) La derivata, calcolata con la regola della catena è:

$$f'(x) = e^{\frac{2}{|2+\log x|}} \left( -\frac{2}{|2+\log x|^2} \right) \frac{2+\log x}{|2+\log x|} \frac{1}{x} = -\frac{2e^{\frac{2}{|2+\log x|}}}{x|2+\log x|^3}(2+\log x).$$

Si noti che la frazione del membro destro è sempre positiva nel dominio $D$, da cui:

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 2 + \log x < 0 \Leftrightarrow 0 < x < e^{-2},$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow 2 + \log x > 0 \Leftrightarrow x > e^{-2},$$

ed $f'(x) \neq 0$ per ogni $x \in D$. In particolar modo $f$ non ha punti critici.

Il grafico di $f$ è in figura 11.

**Esercizio 2 [4 punti]** Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{1}{n}}{1 - 2\sqrt{n}}.$$

*Svolgimento* Per $n \to \infty$ abbiamo $\sin \frac{1}{n} \sim \frac{1}{n}$ e $1 - 2\sqrt{n} \sim -2\sqrt{n}$. Pertanto il termine generale della serie è asintotico a $\frac{-1}{2n^{\frac{3}{2}}}$. Poiché $\frac{3}{2} > 1$, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{2n^{\frac{3}{2}}}$$

converge, e per il principio di convergenza asintotico, anche la prima serie converge.

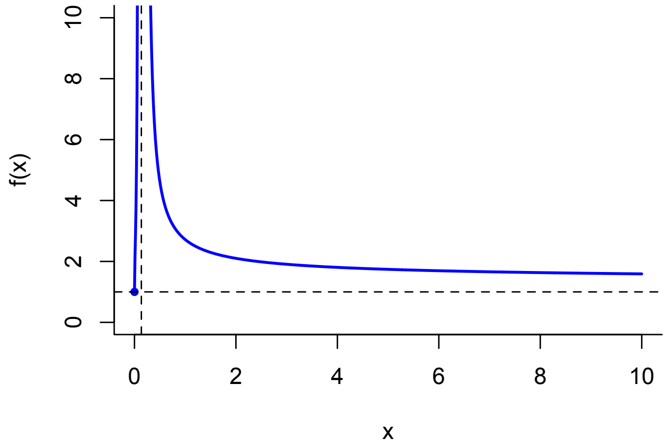



Figura 11: Il grafico di $f$ (Tema 1).

**Esercizio 4 [5+3+4 punti]** a) Si calcoli una primitiva della funzione

$$e^x \log(1+2e^x).$$

Per $\alpha \in \mathbb{R}$, si definisca poi $f_\alpha(x) = e^{\alpha x} \log(1+2e^x)$:
b) si studi la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_0^{+\infty} f_\alpha(x)\, dx$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$;
c) si calcoli lo sviluppo di Taylor di ordine 2 di centro $x_0 = 1$ della funzione

$$F(x) = \int_1^x f_0(t)\, dt.$$

*Svolgimento* a) Con la sostituzione $y = e^x$, $dy = e^x dx$ ed un'integrazione per parti si ottiene

$$\int e^x \log(1+2e^x) dx = \int \log(1+2y) dy = y \log(1+2y) - \int \frac{2y}{1+2y} dy.$$

Ora, per ridurre il numeratore dell'integrando a destra scriviamo

$$\frac{2y}{1+2y} = 1 - \frac{1}{1+2y},$$

Dunque

$$\int \frac{2y}{1+2y} dy = \int \left(1 - \frac{1}{1+2y}\right) dy = y - \frac{\log(1+2y)}{2}.$$

Aggiungendo ai termini precedenti e sostituendo $y = e^x$ si ottiene

$$\int e^x \log(1+2e^x)dx = e^x \log(1+2e^x) - e^x + \frac{\log(1+2e^x)}{2} + c.$$

b) Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ la funzione $f_\alpha$ è continua in $[0, +\infty)$, quindi per studiare la convergenza del suo integrale, studiamo il comportamento di $f_\alpha$ per $x \to \infty$. Per $\alpha \geq 0$ abbiamo che

$$\lim_{x\to\infty} f_\alpha(x) = +\infty,$$

per cui l'integrale $\int_0^{+\infty} f_\alpha(x)dx$ diverge.

Per $\alpha < 0$, abbiamo $f_\alpha(x) = O(x^{-2})$ per $x \to \infty$, e per il criterio del confronto asintotico, l'integrale converge.

c) Abbiamo

$$F(x) = F(1) + F'(1)(x-1) + \frac{F''(1)}{2}(x-1)^2 + o(|x-1|^2) \quad \text{per } x \to 1.$$

Abbiamo

$$F(1) = 0, \quad F'(1) = f_0(1) = \log(1+2e), \quad f_0'(x) = \frac{2e^x}{1+2e^x}, \quad f_0'(1) = \frac{2e}{1+2e},$$

quindi

$$F(x) = \log(1+2e)(x-1) + \frac{e}{1+2e}(x-1)^2 + o(|x-1|^2) \quad \text{per } x \to 1.$$

**Esercizio 5 [6 punti]** Calcolare il limite

$$\lim_{x\to+\infty} x^\alpha \left( \sqrt[8]{x^2-2} - \sqrt[4]{x+1} \right)$$

al variare del parametro $\alpha > 0$.

*Svolgimento.* Usiamo l'espansione $(1+y)^\alpha = 1 + \alpha y + o(y)$ per $y \to 0$ e scriviamo

$$\sqrt[8]{x^2-2} = (x^2-2)^{\frac{1}{8}} = x^{\frac{1}{4}} \left(1 - \frac{2}{x^2}\right)^{\frac{1}{8}} = x^{\frac{1}{4}} \left(1 - \frac{1}{4x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right), \quad \text{per } x \to \infty,$$

$$\sqrt[4]{x-1} = (x-1)^{\frac{1}{4}} = x^{\frac{1}{4}} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{4}} = x^{\frac{1}{4}} \left(1 - \frac{1}{4x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right), \quad \text{per } x \to \infty.$$

Sottraendo otteniamo

$$x^\alpha \left( \sqrt[8]{x^2-2} - \sqrt[4]{x+1} \right) = x^\alpha \cdot x^{\frac{1}{4}} \left( -\frac{1}{4x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) = -\frac{x^{\alpha-\frac{3}{4}}}{4}(1+o(1)) \quad \text{per } x \to \infty.$$

Pertanto

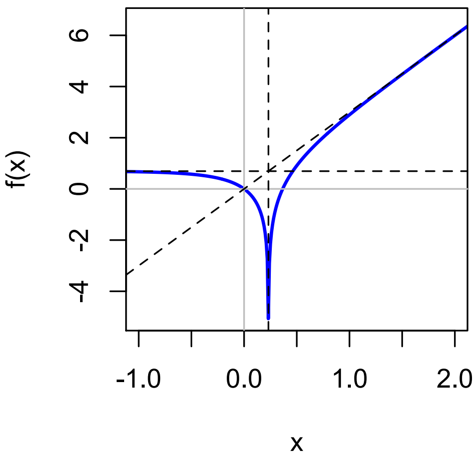
$$\lim_{x\to+\infty} x^\alpha \left( \sqrt[8]{x^2-2} - \sqrt[4]{x+1} \right) = \lim_{x\to+\infty} \left( -\frac{x^{\alpha-\frac{3}{4}}}{4}(1+o(1)) \right) = \begin{cases} 0 & \text{per } \alpha < \frac{3}{4} \\ -\frac{1}{4} & \text{per } \alpha = \frac{3}{4} \\ -\infty & \text{per } \alpha > \frac{3}{4}. \end{cases}$$

## Appello del 17.09.2019

## Tema 1

**Esercizio 1.** Sia
$$f(x) = \log \left| e^{3x} - 2 \right|.$$
a) Determinare il dominio $D$ e studiare il segno di $f$; determinare i limiti di $f$ agli estremi di $D$ e determinarne gli eventuali asintoti;
b) studiare la derivabilità, calcolare la derivata e studiare la monotonia di $f$; determinarne gli eventuali punti di estremo relativo ed assoluto;
c) disegnare un grafico qualitativo di $f$.

*Svolgimento.* a) Chiaramente $D = \{x \in \mathbb{R} \, : \, |e^{3x} - 2| > 0\} = \{x \in \mathbb{R} \, : \, e^{3x} - 2 \neq 0\} = \mathbb{R} \backslash \{\frac{\log 2}{3}\}$. Segno:
$$f(x) \geqslant 0 \iff |e^{3x} - 2| \geqslant 1 \iff e^{3x} - 2 \leqslant -1 \text{ e } e^{3x} - 2 \geqslant 1 \iff x \leqslant 0, \text{ e } x \geqslant \frac{\log 3}{3}.$$
Dove vale $=$ si hanno anche gli zeri di $f$. Limiti e asintoti: dobbiamo studiare la funzione per $x \longrightarrow \pm\infty, \frac{\log 2}{3}$. Facilmente, $f(-\infty) = \log 2$, quindi $y = \log 2$ è asintoto orizzontale a $-\infty$. A $+\infty$ facilmente $f(+\infty) = +\infty$. Cerchiamo un eventuale asintoto obliquo $y = mx + q$. Per $m$ abbiamo che
$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\log(e^{3x} - 2)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\log(e^{3x} \cdot 1_x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{3x + 0_x}{x} = 3.$$
Per $q$ abbiamo
$$q = \lim_{x \to +\infty} (f(x) - 3x) = \lim_{x \to +\infty} \left( \log(e^{3x} - 2) - \log e^{3x} \right) = \lim_{x \to +\infty} \log \frac{e^{3x} - 2}{e^{3x}} = \log 1 = 0.$$
Conclusione: $y = 3x$ è asintoto obliquo a $+\infty$. Infine,
$$\lim_{x \to \frac{\log 2}{3}} \log |e^{3x} - 2| = \log 0+ = -\infty,$$
da cui $x = \frac{\log 2}{3}$ è asintoto verticale.
b) Chiaramente $f$ è continua sul proprio dominio essendo composizione di funzioni continue ove definite. È anche derivabile poiché l'unico punto in cui non si può applicare la regola della catena è $x$ t.c. $e^{3x} - 2 = 0$, cioè $x = \frac{\log 2}{3}$, che però non appartiene al dominio di $f$. La derivata è
$$f'(x) = \frac{1}{|e^{3x} - 2|} \operatorname{sgn}(e^{3x} - 2) \cdot 3e^{3x} = \frac{3e^{3x}}{e^{3x} - 2}.$$
Da questa segue che
$$f'(x) \geqslant 0, \iff e^{3x} - 2 > 0, \iff x > \frac{\log 2}{3}.$$
Si conclude che $f \searrow$ su $]-\infty, \frac{\log 2}{3}[$ mentre $f \nearrow$ su $]\frac{\log 2}{3}, +\infty[$. Non ci sono, di conseguenza né minimi né massimi (di qualsiasi natura).
c) Grafico.




**Esercizio 2.** Si calcoli il limite
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{x-2x^2}-1-x}{\sinh x^2 + x^{7/3}\log x}.$$

*Svolgimento.* Ricordato che $\lim_{x\to 0+} x^\alpha \log x = 0$, si vede facilmente che il limite si presenta come una forma del tipo $0/0$. Studiamo l'ordine di infinitesimo di numeratore e denominatore. Ricordato che

$$e^t = 1+t+o(t) = 1+t+\frac{t^2}{2}+o(t^2),$$

abbiamo
$$N = 1+(x-2x^2)+o(x-x^2)-1-x = -2x^2+o(x) = o(x),$$
insufficiente per un comportamento preciso,

$$N = 1+(x-2x^2)+\frac{(x-2x^2)^2}{2}+o((x-2x^2)^2)-1-x = -2x^2+\frac{x^2}{2}+o(x^2) \sim -\frac{3}{2}x^2 \text{ per } x\to 0^+.$$

Per il denominatore è sufficiente ricordare che $\sinh t = t+o(t)$ per cui

$$D = x^2+o(x^2)+x^{7/3}\log x = x^2+o(x^2) \quad \text{per } x\to 0^+,$$

essendo $x^{7/3}\log x = o(x^2)$ poiché $\frac{x^{7/3}\log x}{x^2} = x^{1/3}\log x \longrightarrow 0$ per $x \longrightarrow 0+$. Dunque

$$\frac{N}{D} \sim \frac{-\frac{3}{2}x^2}{x^2} \longrightarrow -\frac{3}{2}.$$

**Esercizio 4.** a) Calcolare l'integrale indefinito

$$\int \left(\tan\frac{x}{2}\right)^3 dx \qquad \text{(sugg.: eseguire la sostituzione } \tan\frac{x}{2} = u\text{).}$$

b) studiare la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\tan x}{x^{\alpha+2}} dx$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

*Svolgimento.* a) Seguendo il suggerimento $u = \tan x/2$, $x = 2\arctan u$ da cui $dx = \frac{2}{1+u^2}$, pertanto

$$\begin{aligned} \int \left(\tan\tfrac{x}{2}\right)^3\, dx &= \int \tfrac{2u^3}{1+u^2}\, du = 2\int \tfrac{u(u^2+1-1)}{1+u^2}\, du = \int 2u - \tfrac{2u}{1+u^2}\, du = u^2 - \log(1+u^2) \\ &= \left(\tan\tfrac{x}{2}\right)^2 - \log\left(1 + \left(\tan\tfrac{x}{2}\right)^2\right). \end{aligned}$$

b) Sia $f(x) = \frac{\tan x}{x^{\alpha+2}}$. Certamente $f \in C(]0, \frac{\pi}{6}])$ per ogni $\alpha$ ed è continua anche in $x = 0$ (quindi integrabile sicuramente) per $\alpha + 2 \leqslant 0$, cioè per $\alpha \leqslant -2$. Per $\alpha > -2$ abbiamo un integrale generalizzato in $x = 0$. Ricordato che $\tan x = x + o(x) = x1_x$ per $x \longrightarrow 0$,

$$f(x) \sim \frac{x}{x^{\alpha+2}} = \frac{1}{x^{\alpha+1}} \sim \frac{1}{x^{\alpha+1}} \quad \text{per } x \to 0^+,$$

integrabile in 0 se e solo se $\alpha + 1 < 1$, cioè $\alpha < 0$ per confronto asintotico. Morale: l'integrale generalizzato esiste finito se e solo se $\alpha < 0$.

**Esercizio 5.** (i) Si dimostri che la successione

$$a_n = \log(n+1) - \log\sqrt{n^2 + \alpha n + 4}$$

è infinitesima per $n \to \infty$ (per ogni $\alpha$) e per $\alpha = 2$ se ne calcoli l'ordine;
(ii) si studi la convergenza della serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

*Svolgimento.* i) Osserviamo che

$$a_n = \log\frac{n+1}{\sqrt{n^2+\alpha n+4}} \sim \log\frac{n}{n} \longrightarrow 0.$$

Per avere l'ordine di infinitesimo occorre essere più precisi. Notiamo che, fattorizzando $n$ e usando le proprietà dei logaritmi

$$a_n = \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{2}\log\left(1 + \frac{\alpha}{n} + \frac{4}{n^2}\right).$$

Ricordato che $\log(1+t) = t + o(t) = t - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$,

$$\begin{aligned} a_n &= \tfrac{1}{n} - \tfrac{1}{2n^2} + o\left(\tfrac{1}{n^2}\right) - \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{\alpha}{n} + \tfrac{4}{n^2} - \frac{\left(\frac{\alpha}{n}+\frac{4}{n^2}\right)^2}{2} + o\left(\tfrac{1}{n^2}\right)\right) \\ &= \tfrac{2-\alpha}{2n} - \tfrac{5-\alpha^2}{2n^2} + o\left(\tfrac{1}{n^2}\right). \end{aligned}$$

In particolare, se $\alpha = 2$ si ottiene $a_n \sim -\frac{1}{2n^2}$.
ii) Per quanto visto al punto i),

$$a_n \sim \begin{cases} \frac{2-\alpha}{2n} \equiv \frac{C}{n}, & \alpha \neq 2, \\ \\ -\frac{1}{2n^2} \equiv \frac{C}{n^2}, & \alpha = 2, \end{cases}$$

da cui si conclude che $\sum_n a_n$ converge se e solo se $\alpha = 2$ in virtù del criterio del confronto asintotico.