Prova scritta di Istituzioni di Matematiche

per il c.l. in Scienze e Tecnologie per i Beni Culturali

13 dicembre 2007

(1) Si dimostri per induzione che per ogni $n \in \mathbb{N},\ n \geq 1$, risulta

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{4i^2 - 1} = \frac{n}{2n+1}.$$

(2) Si vuole costruire una scatola chiusa di cartone a forma di parallelepipedo, con gli spigoli di base uno triplo dell'altro, che abbia un volume totale pari a $4/3\ dm^3$ ed una minima superficie totale. Come si dovranno scegliere le lunghezze dei tre spigoli? Quanto cartone serve?

(3) Si consideri la funzione reale di variabile reale

$$f(x) = \frac{x(\ln x - 4)}{\ln x}.$$

Se ne studino:

– dominio, segno;

– limiti significativi, eventuali asintoti, continuità;

– derivata prima, crescenza, eventuali massimi e minimi, eventuali attacchi;

– derivata seconda, convessità, eventuali flessi;

– grafico.

(4) Si verifichi che la funzione

$$f(x) = \int_{\pi}^{x^2} \cos^{18} t \, dt$$

è infinitesima di ordine 1 nel punto $x_0 = \sqrt{\pi}$, e se ne determini la parte principale.

(5) Si calcolino i seguenti integrali:

$$\int_1^e (x^2 - x + 1) \ln x \, dx, \qquad \int \sqrt{2 - e^x} \, dx, \qquad \int \frac{e^x \sin(e^x)}{\cos^3(e^x)} \, dx.$$

(6) Si calcoli il volume del solido ottenuto per rotazione attorno all'asse delle ascisse del trapezoide individuato dalla funzione

$$f(x) = x \sqrt{\arctan x}$$

nell'intervallo $[0, 1]$.