Matematica e Statistica (per Biotecnologie)

ALCUNE OSSERVAZIONI SULLA DERIVATA

Riportiamo qui alcune utili osservazioni sulla derivata di funzioni reali di variabile reale. Iniziamo con la seguente:

PROPOSIZIONE. *Sia I intervallo di $\mathbb{R}$, $x_0 \in I$ e sia $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ continua in I e derivabile in $I \setminus \{x_0\}$; supponiamo che esista finito il limite $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = l$. Allora f è derivabile in x_0 ed è $f'(x_0) = l$.*

Dimostrazione. Osserviamo che il limite $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Poiché il limite $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)$ esiste finito, applicando la regola di Bernoulli-de l'Hôpital otteniamo che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = l,$$

e dunque f è derivabile in x_0 e $f'(x_0) = l$. $\square$

ESEMPIO. Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x) = \begin{cases} e^{1/x}, & \text{se } x < 0, \\ 0, & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

È facile verificare che f è continua in 0. Inoltre si ha

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{-e^{1/x}}{x^2}, & \text{se } x < 0, \\ 0, & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

Ora, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-e^{1/x}}{x^2}$ e $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 0 = 0$, quindi esiste $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$ e vale 0. Pertanto esiste $f'(0)$ ed è $f'(0) = 0$.

Vogliamo ora mostrare che la condizione di esistenza e finitezza del limite $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)$ è sufficiente, ma non necessaria. Consideriamo il seguente:

ESEMPIO. Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & \text{se } x \neq 0, \\ 0, & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Osserviamo che f è continua e derivabile in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, ed è $f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$ per ogni $x \neq 0$. Tale funzione è inoltre continua e derivabile in 0, infatti

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0,$$

e dunque $f'(0) = 0$. Tuttavia il limite $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$ non esiste, a causa dell'oscillazione di $\cos \frac{1}{x}$.