Istituzioni di Matematiche, Equazioni differenziali

corso di laurea in Scienze geologiche.

Mauro Costantini

1. Introduzione

Esistono vari fenomeni in cui la rapidità di variazione di una certa quantità risulta proporzionale, in ogni istante, alla quantità stessa. Un tipico esempio di ciò è dato dalla variazione del numero di atomi di un elemento radioattivo X, che si decompone in altre sostanze; se riteniamo che sia costante nel tempo la probabilità $p > 0$ che un nucleo si scinda, ed all'istante t ci sono $y(t)$ atomi di X, la frequenza di scissioni nell'intervallo $[t, t + \Delta t]$, riferita al tempo trascorso Δt è

$$-\frac{y(t + \Delta t) - y(t)}{y(t)\Delta t} \approx p$$

e si ritiene che sia esatta la relazione istantanea che si ottiene facendo il limite per $\Delta t \to 0$, cioè

$$-\frac{y'(t)}{y(t)} = p \qquad \Longleftrightarrow \qquad y'(t) = -p\, y(t) \quad .$$

Una volta conosciuto l'ammontare $y_0 = y(t_0)$ della sostanza X ad un istante t_0, la relazione $y'(t) = -p\, y(t)$ individua completamente la funzione $y(t)$: essa è la funzione

$$\varphi(t) = y_0 e^{-p(t-t_0)} \quad ;$$

è facile verificare che effettivamente la funzione $\varphi : t \mapsto y_0 e^{-p(t-t_0)}$ soddisfa alle condizioni richieste, valendo y_0 per $t = t_0$, ed essendo inoltre

$$\varphi'(t) = \frac{d}{dt} y_0 e^{-p(t-t_0)} = y_0 e^{-p(t-t_0)}(-p) = -p\left(y_0 e^{-p(t-t_0)}\right) = -p\, \varphi(t)$$

per tale funzione $\varphi'(t) = -p\, \varphi(t)$ è quindi anche vera, per ogni $t \in \mathbb{R}$. È meno ovvio mostrare (ma in questo caso non così difficile, come vedremo) che $\varphi(t) = y_0 e^{-p(t-t_0)}$ è l'unica funzione che verifica le condizioni date.

2. Notazioni

k sta per il campo $\mathbb{R}$ dei numeri reali o per il campo $\mathbb{C}$ dei numeri complessi; se I è intervallo di $\mathbb{R}$, $C^n(I, k)$ denota l'insieme delle funzioni definite su I, a valori in k, e di classe C^n su I, cioè che su I (estremi inclusi, se questi stanno in I) sono continue con le loro derivate prima, seconda, ..., $n-$esima. Il simbolo $C^0(I, k)$ in particolare sta per l'insieme delle funzioni continue su I a valori in k.

3. Un caso particolare

Consideriamo le soluzioni dell'equazione differenziale

$$(*) \qquad y' = \alpha y$$

dove α è un fissato numero reale. Si tratta di determinare le funzioni derivabili $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tali che per ogni $t \in \mathbb{R}$ vale $g'(t) = \alpha g(t)$. La funzione $f(t) = e^{\alpha t}$ ha questa proprietà, in quanto $f'(t) = \alpha e^{\alpha t} = \alpha f(t)$.

Sia $c \in \mathbb{R}$, allora la funzione $g = cf$ (ricordo che per definizione $(cf)(t) = c\,f(t)$ per ogni $t \in \mathbb{R}$) soddisfa $(*)$, infatti

$$g'(t) = (cf)'(t) = c\,f'(t) = c\,\alpha f(t) = \alpha g(t)$$

Pertanto la famiglia di funzioni (uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$)

$$(**) \qquad S = \{g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ t \mapsto c\,e^{\alpha t} \mid c \in \mathbb{R}\}$$

è costituito da funzioni che sono tutte soluzioni di $(*)$. Dimostriamo che le funzioni in $(**)$ sono tutte e sole le soluzioni di $(*)$.

Supponiamo di avere una soluzione g di $(*)$. Si consideri la funzione $h(t) = g(t)e^{-\alpha t}$; derivando tale funzione, e servendosi del fatto che $g'(t) = \alpha g(t)$, si ha

$$h'(t) = g'(t)e^{-\alpha t} - \alpha g(t)e^{-\alpha t} = \alpha g(t)e^{-\alpha t} - \alpha g(t)e^{-\alpha t} = 0$$

per ogni $t \in \mathbb{R}$; ne segue che $h(t)$ è costante, ossia $h(t) = c$ per un certo $c \in \mathbb{R}$. Ma allora $g(t) = ce^{\alpha t}$, come dovevamo dimostrare. In conclusione, l'insieme S è l'insieme delle soluzioni di $(*)$.

Generalizziamo ora le tecniche appena introdotte ad una classe più vasta di equazioni differenziali.

4. Equazioni lineari omogenee del primo ordine

Teorema 4.1. *Sia I un intervallo di $\mathbb{R}$ e sia $P : I \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Sia $A(t)$ una fissata primitiva di $P(t)$ su I. Allora l'insieme delle soluzioni di*

$$(*) \qquad y' + P(t)y = 0$$

su I è la famiglia di funzioni (uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ di dimensione 1)

$$f : I \to \mathbb{R},\ t \mapsto c\,e^{-A(t)}$$

al variare di $c \in \mathbb{R}$.

Dimostrazione. Poniamo $f(t) = c\,e^{-A(t)}$. È immediato vedere che f è soluzione di $(*)$:

$$f'(t) + P(t)f(t) = -A'(t)c\,e^{-A(t)} + P(t)c\,e^{-A(t)} = -P(t)c\,e^{-A(t)} + P(t)c\,e^{-A(t)} = 0$$

poiché $A'(t) = P(t)$. Sia ora $g(t)$ una soluzione di $(*)$ e poniamo $h(t) = g(t)e^{A(t)}$. Allora

$$h'(t) = g'(t)e^{A(t)} + g(t)A'(t)e^{A(t)} = -P(t)g(t)e^{A(t)} + g(t)P(t)e^{A(t)} = 0$$

in quanto essendo g una soluzione di $(*)$, si ha $g'(t) + P(t)g(t) = 0$ e quindi $g'(t) = -P(t)g(t)$ per ogni $t \in \mathbb{R}$. Pertanto h è costante, ossia esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che $h(t) = c$ per ogni t in I.

Ma allora $g(t) = c\,e^{-A(t)}$, come dovevamo dimostrare. #

Teorema 4.2. *Sia I intervallo di $\mathbb{R}$ e sia $P : I \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Siano $a \in I$, $b \in \mathbb{R}$ fissati. Esiste allora un'unica funzione $f : I \to \mathbb{R}$ tale che*

$$\begin{cases} f' + P(t)f = 0 \\ f(a) = b \end{cases}$$

Un modo di esprimere tale f è dato dalla formula $f(t) = b\, e^{-\int_a^t P(u)\,du}$.

Soluzione. Si tratta di risolvere il problema alle condizioni iniziali

$$(*) \qquad \begin{cases} y' + P(t)y = 0 \\ y(a) = b \end{cases}$$

Conosciamo tutte le soluzioni di $y' + P(t)y = 0$. Fissata una primitiva $A(t)$ di $P(t)$ le soluzioni di $y' + P(t)y = 0$ sono tutte e sole della forma $f(t) = c\, e^{-A(t)}$ al variare di $c \in \mathbb{R}$. A questo punto $f(a) = c\, e^{-A(a)}$, e imponendo la condizione iniziale $f(a) = b$ si trova

$$c\, e^{-A(a)} = b$$

che è una equazione in c, con la sola soluzione $c = b\, e^{A(a)}$. Pertanto il problema $(*)$ ha una sola soluzione

$$f : I \to \mathbb{R} \quad , \quad f(t) = b\, e^{A(a)} e^{-A(t)}$$

Volendo, si può prendere una particolare primitiva $A(t)$ di $P(t)$, più precisamente l'unica primitiva $A(t)$ di $P(t)$ per cui $A(a) = 0$, ossia

$$A(t) = \int_a^t P(u)\, du$$

Con questa particolare scelta la soluzione di $(*)$ prende la forma

$$f : I \to \mathbb{R} \quad , \quad f(t) = b\, e^{-\int_a^t P(u)\,du}$$

#

Esercizio. Risolvere l'equazione differenziale $y' = 2ty$.

Soluzione. Scritta l'equazione nella forma $y' - (2t)y = 0$, si ha $P(t) = -2t$. Come primitiva di $P(t)$ possiamo prendere $A(t) = -t^2$ e quindi la soluzione generale è

$$y = ce^{t^2}$$

al variare di c in $\mathbb{R}$. #

Esercizio. Risolvere le equazioni $y' = y/t$, $y' = -y/t$ su $I = (0, +\infty)$.

Soluzione. Nel primo caso è $P(t) = -1/t$; preso $A(t) = -\log t$ si ha $y(t) = ce^{\log t} = ct$ al variare di $c \in \mathbb{R}$; l'equazione ha cioè per soluzione tutte le funzioni lineari di $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$, "leggi di proporzionalità diretta" (ristrette a $(0, +\infty)$).

Nel secondo caso è $P(t) = 1/t$ e possiamo prendere $A(t) = \log t$; si ha $y(t) = ce^{-\log t} = c/t$. Le soluzioni sono tutte le "leggi di proporzionalità inversa", $t \mapsto c/t$ al variare di $c \in \mathbb{R}$. #

Esercizio. Trovare tutte le funzioni soddisfacenti all'equazione differenziale $y' + (\operatorname{tg} t)\, y = 0$ su $I = (-\pi/2, \pi/2)$. Determinare poi tra queste quelle che valgono 1 per $t = 0$.

Soluzione. Una primitiva di $P(t) = \operatorname{tg} t$ è $A(t) = -\log|\cos t| = -\log\cos t$ (tenendo qui conto di $t \in (-\pi/2, \pi/2)$ per eliminare il simbolo di valore assoluto). Essendo $e^{-A(t)} = e^{\log\cos t} = \cos t$, segue che l'insieme delle soluzioni è $y(t) = c\,\cos t$ al variare di $c \in \mathbb{R}$.

Per $t = 0$ tale funzione vale $y(0) = c\cos 0 = c$, da cui $c = 1$; la soluzione richiesta è quindi $y(t) = \cos t$. #

5. Equazioni lineari del primo ordine

Consideriamo adesso l'equazione differenziale lineare del primo ordine

$$y' + P(t)y = Q(t) \tag{$*$}$$

su un intervallo I. L'equazione differenziale $y' + P(t)y = 0$ si dice l'*equazione omogenea associata all'equazione* $y' + P(t)y = Q(t)$.

Fissiamo una primitiva $A(t)$ di $P(t)$ e moltiplichiamo entrambi i membri di $(*)$ per $e^{A(t)}$:

$$y'(t)e^{A(t)} + P(t)y(t)e^{A(t)} = e^{A(t)}Q(t) \tag{1}$$

Osserviamo che posto $h(t) = y(t)e^{A(t)}$, si ha

$$h'(t) = y'(t)e^{A(t)} + A'(t)y(t)e^{A(t)} = y'(t) + P(t)y(t)e^{A(t)}$$

e quindi (1) si può scrivere come

$$h'(t) = e^{A(t)}Q(t)$$

Pertanto $y(t)e^{A(t)}$ è una primitiva di $Q(t)e^{A(t)}$ e

$$y(t) = e^{-A(t)} \int e^{A(t)}Q(t)dt$$

Se $G(t)$ è una fissata primitiva di $e^{A(t)}Q(t)$, allora le soluzioni di $(*)$ sono tutte e sole del tipo

$$y(t) = e^{-A(t)}(G(t) + c)$$

al variare di $c \in \mathbb{R}$.

Esercizio. Risolvere l'equazione differenziale $y' + 3x^2 y = 6x^2$ su $\mathbb{R}$.

Soluzione. In questo caso si ha $P(x) = 3x^2$, $Q(x) = 6x^2$. Una primitiva di $3x^2$ è x^3, e quindi prendiamo $A(x) = x^3$. A questo punto dobbiamo calcolare

$$\int e^{A(x)} Q(x) dx = \int 6x^2 e^{(x^3)} dx$$

Posto $u = e^{(x^3)}$, $du = 3x^2 e^{(x^3)} dx$ si ha

$$\int 6x^2 e^{(x^3)} dx = \int 2du = 2u + C = 2e^{(x^3)} + C$$

al variare di $C \in \mathbb{R}$. La soluzione generale di $y' + P(x)y = Q(x)$ è $y = e^{-A(x)} \int e^{A(x)} Q(x) dx$ dove nel nostro caso

$$e^{-A(x)} = e^{-(x^3)}$$

$$\int e^{A(x)} Q(x) dx = 2e^{(x^3)} + C$$

quindi

$$e^{-A(x)} \int e^{A(x)} Q(x) dx = e^{-(x^3)} (2e^{(x^3)} + C) = 2 + Ce^{-(x^3)}$$

Pertanto la soluzione generale di $y' + 3x^2 y = 6x^2$ è $y = 2 + Ce^{-(x^3)}$ al variare di $C \in \mathbb{R}$. #

6. Equazioni lineari del primo ordine alle condizioni iniziali

Consideriamo adesso il problema alle condizioni iniziali

$$(*) \qquad \begin{cases} y' + P(t)y = Q(t) \\ y(a) = b \end{cases}$$

dove $a \in I$, $b \in \mathbb{R}$. Si tratta quindi di individuare tra le soluzioni di $y' + P(t)y = Q(t)$ quelle che soddisfano la condizione $y(a) = b$. Come nel caso delle equazioni omogenee, si trova un'unica soluzione di $(*)$.

Sappiamo infatti che le soluzioni di $y' + P(t)y = Q(t)$ sono del tipo $y(t) = e^{-A(t)}(G(t) + c)$, al variare di $c \in \mathbb{R}$. Valutando $y(t)$ in $t = a$ si ottiene

$$y(a) = e^{-A(a)}(G(a) + c)$$

e, imponendo la condizione $y(a) = b$, si ottiene l'equazione in c

$$e^{-A(a)}(G(a) + c) = b$$

che ha come unica soluzione

$$c = b\, e^{A(a)} - G(a)$$

La soluzione di $(*)$ risulta pertanto essere

$$y(t) = e^{-A(t)}(G(t) + b\, e^{A(a)} - G(a))$$

Volendo, si può prendere una particolare primitiva $A(t)$ di $P(t)$, più precisamente l'unica primitiva $A(t)$ di $P(t)$ per cui $A(a) = 0$, ossia

$$A(t) = \int_a^t P(u)\, du$$

A questo punto possiamo prendere una particolare primitiva $G(t)$ di $e^{A(t)}Q(t)$, più precisamente l'unica primitiva $G(t)$ di $e^{A(t)}Q(t)$ per cui $G(a) = 0$, ossia

$$G(t) = \int_a^t e^{A(u)}Q(u)\, du$$

Con queste particolari scelte, la soluzione di $(*)$ prende la forma

$$y(t) = e^{-\int_a^t P(u)\, du}(\int_a^t e^{A(u)}Q(u)\, du + b)$$

Osservazione. L'equazione omogenea $y' + P(t)y = 0$ ha sempre la soluzione nulla (cioè la soluzione $y(t) = 0$ per ogni $t \in I$); se $Q(t)$ non è identicamente nulla, chiaramente l'equazione non omogenea $y' + P(t)y = Q(t)$ non ha la costante nulla fra le sue soluzioni.

Esercizio. Trovare la soluzione di

$$(*) \qquad \begin{cases} x^2y' + xy = 1 \\ y(1) = 2 \end{cases}$$

su $I = (0, +\infty)$.

Soluzione. Scriviamo l'equazione $x^2y'+xy = 1$ nella forma $y'+\frac{1}{x}y = \frac{1}{x^2}$ (visto il dominio, le due equazioni hanno le stesse soluzioni). Quindi $P(x) = \frac{1}{x}$, $Q(x) = \frac{1}{x^2}$. Una primitiva $A(x)$ di $\frac{1}{x}$ è $A(x) = \log x$ (non serve il modulo, visto il dominio). A questo punto calcoliamo

$$\int e^{A(x)}Q(x)\, dx = \int \frac{1}{x^2}e^{\log x}\, dx = \int \frac{1}{x^2}\, x\, dx = \int \frac{1}{x}\, dx = \log x + C$$

al variare di $C \in \mathbb{R}$. La soluzione generale di $y' + P(x)y = Q(x)$ è $y = e^{-A(x)} \int e^{A(x)}Q(x)dx$ dove nel nostro caso

$$e^{-A(x)} = e^{-\log x} = \frac{1}{x}$$

$$\int e^{A(x)}Q(x)dx = \log x + C$$

quindi

$$e^{-A(x)} \int e^{A(x)}Q(x)dx = \frac{1}{x}(\log x + C) = \frac{\log x + C}{x}$$

Pertanto la soluzione generale di $y' + \frac{1}{x}y = \frac{1}{x^2}$ (su I) è

$$y = \frac{\log x + C}{x}$$

al variare di $C \in \mathbb{R}$.

Valutando y in $x = 1$ si trova

$$y(1) = \frac{\log 1 + C}{1} = C$$

e imponendo la condizione iniziale $y(1) = 2$ si trova

$$C = 2$$

La soluzione di $(*)$ è dunque

$$y = \frac{\log x + 2}{x}$$

#

6. Alcuni problemi fisici che si riconducono a equazioni differenziali lineari del primo ordine.

Esempio 6.1. *Decadimento radioattivo.* Denotiamo con $y = f(t)$ la quantità di elementi radioattivi presente al tempo t, la derivata y' rappresenta il tasso di variazione di y al tempo t e la legge del decadimento afferma che

$$y' = -ky, \tag{1}$$

dove k è una costante positiva (la costante di decadimento), il cui valore dipende dal particolare elemento che si disintegra. Stiamo dicendo che la rapidità con cui una sostanza si decompone è proporzionale in ogni istante alla quantità presente in quell'istante. Il segno – interviene perchè y decresce quando t cresce, e quindi y' è sempre negativa. L'equazione (1) è il modello matematico usato nei problemi di decadimento radioattivo. Ogni soluzione di questa equazione ha la forma

$$f(t) = f(0)e^{-kt}.$$

Per conoscere la quantità presente al tempo t è necessario conoscere la quantità iniziale $f(0)$ e la costante k. Ora $f(t)$ non è mai nulla (se $f(0) \neq 0$), ed è interessante conoscere il tempo di dimezzamento (o semiperiodo, o vita media) T, cioè il tempo nel quale si ha $f(T) = f(0)/2$. Facendo il conto si trova

$$f(0)e^{-kT} = f(0)/2 \quad , \quad e^{-kT} = 1/2$$

cioè

$$-kT = \log(1/2) \quad , \quad kT = \log 2 \quad , \quad T = \frac{\log 2}{k}.$$

dove ovviamente il logaritmo è in base naturale. Concludiamo osservando che se confrontiamo $f(t+T)$ con $f(t)$ troviamo

$$f(t+T) = f(0)e^{-k(t+T)} = f(0)e^{-kT}e^{-kt} = \frac{1}{2}f(0)e^{-kt} = \frac{1}{2}f(t)$$

per ogni t. Quindi il tempo di dimezzamento è lo stesso, per ogni quantitativo dello stesso materiale.

Esempio 6.2. La vita media del radio è circa 1600 anni. Determinare la percentuale di radio che si disintegra in 100 anni.

Soluzione. In questo caso $T = 1600$. Quindi $k = \frac{\log 2}{1600}$. Al tempo $t = 100$ la quantità presente è $f(0)e^{-\frac{\log 2}{1600}100} = f(0)2^{-\frac{1}{16}}$. La quantità disintegrata è

$$f(0)(1 - 2^{-\frac{1}{16}})$$

Sia x la percentuale richiesta, cioè se la quantità iniziale è 100, allora la quantità disintegrata è x. Dalla relazione

$$\frac{f(0)(1 - 2^{-\frac{1}{16}})}{f(0)} = \frac{x}{100}$$

segue $x = 100(1 - 2^{-\frac{1}{16}})$, cioè circa $x = 4,2$.

Esempio 6.3. *Caduta libera in un mezzo resistente.* Un corpo di massa m inizialmente fermo è lasciato cadere da una grande altezza nell'atmosfera terrestre. Si supponga che il corpo si muova di moto rettilineo e che le sole forze che agiscono su di esso siano la forza di gravità mg, dove g è l'accelerazione di gravità che supponiamo costante, e una forza di attrito (resistenza dell'aria) proporzionale alla velocità. Studiare il moto.

Soluzione. Sia $s = f(t)$ lo spazio percorso nella caduta al tempo t, sia $v = s'$ la velocità. L'ipotesi iniziale è $f'(0) = 0$. Ci sono due forze che agiscono su m: una è mg (verso il basso), ed una è $-kv$ (verso l'alto). Qui k è una certa costante positiva. La seconda legge di Newton dice che in ogni istante la somma (vettoriale) delle forze agenti sul corpo è uguale al prodotto della massa per l'accelerazione. Ora denotiamo con a l'accelerazione di m, cioè $a = v' = s''$, e otteniamo

$$ma = mg - kv.$$

Questa può essere considerata una equazione differenziale del secondo ordine in s, oppure una equazione differenziale del primo ordine in v:

$$v' + \frac{k}{m}v = g.$$

Tale equazione è il modello matematico del problema. Poichè $v(0) = 0$, dalla soluzione generale otteniamo

$$v = e^{-\frac{kt}{m}} \int_0^t g e^{\frac{kx}{m}}\, dx = \frac{mg}{k}(1 - e^{-\frac{kt}{m}}). \tag{2}$$

Per $t \to +\infty$ si ha $v \to \frac{mg}{k}$ e $a \to 0$ (in quanto $a = g - \frac{k}{m}v$): *la resistenza quindi tende a bilanciare la forza di gravità.*

Essendo $v = s'$, possiamo integrare (2) ed ottenere

$$s = \frac{mg}{k}t + \frac{m^2 g}{k^2}e^{-\frac{kt}{m}} + C.$$

Se scegliamo il riferimento in modo che $s(0) = 0$ si ottiene $C = -\frac{gm^2}{k^2}$ e quindi

$$s = \frac{mg}{k}t + \frac{m^2 g}{k^2}(e^{-\frac{kt}{m}} - 1).$$

Se per $t = 0$ la velocità iniziale è v_0, la formula (2) risulta essere

$$v = \frac{mg}{k}(1 - e^{-\frac{kt}{m}}) + v_0 e^{-\frac{kt}{m}}.$$

Notiamo che allora per $t \to +\infty$, comunque $v \to \frac{mg}{k}$, indipendentemente da v_0 (che puo' essere nulla, verso il basso o verso l'alto).

ESEMPIO 6.4. *Un problema di raffreddamento.* La velocità con cui un corpo cambia temperatura è proporzionale alla differenza tra la propria temperatura e la temperatura dell'ambiente circostante (la legge di Newton del raffreddamento). Indico con $y = f(t)$ la temperatura (da determinare) del corpo al tempo t e con $M(t)$ la temperatura (nota) dell'ambiente circostante. La legge di Newton conduce a

$$y(t + \Delta t) = y(t) - k(y(t) - M(t))\Delta t$$

dove al solito assumiamo, in prima approssimazione, $y(t)$ costante nell'intervallo Δt. Passando al limite per $\Delta t \to 0$, otteniamo l'equazione differenziale

$$y' = -k(y - M(t)) \quad \text{cioè} \quad y' + ky = kM(t),$$

dove k è una costante positiva. Questa equazione lineare del primo ordine è il modello matematico per i problemi di raffreddamento. L'unica soluzione per cui $f(0) = b$ è data da

$$f(t) = be^{-kt} + e^{-kt}\int_0^t kM(x)e^{kx}dx. \tag{3}$$

ESEMPIO 6.5. Supponiamo che la temperatura del corpo passi da 200 gradi a 100 gradi in 40 minuti, essendo immerso in un ambiente la cui temperatura è mantenuta costante, $M(t) = 10$ gradi. Se misuriamo t in minuti ed $f(t)$ in gradi, avremo $f(0) = 200$, e quindi otteniamo dalla (3)

$$\begin{aligned} f(t) &= 200e^{-kt} + 10e^{-kt}\int_0^t ke^{kx}dx = 200e^{-kt} + 10e^{-kt}[e^{kx}]_0^t \\ &= 200e^{-kt} + 10e^{-kt}(e^{kt} - 1) = 10 + 190e^{-kt}. \end{aligned}$$

Dalla condizione $f(40) = 100$, otteniamo k. Da $100 = 10 + 190e^{-40k}$, segue $90 = 190e^{-40k}$, e quindi

$$-40k = \log(90/190) \quad , \quad k = \frac{1}{40}(\log 19 - \log 9).$$

Calcoliamo adesso il tempo necessario allo stesso materiale per passare da 200 gradi a 100 gradi se la temperatura dell'ambiente è mantenuta a 5 gradi. Ora noi abbiamo già determinato k, che dipende dal materiale. L'equazione quindi l'abbiamo, ma con un diverso $M(t)$:

$$\begin{aligned} f(t) &= 200e^{-kt} + 5ke^{-kt}\int_0^t e^{kx}dx \\ &= 200e^{-kt} + 5k(1 - e^{-kt}) = 5 + 195e^{-kt}. \end{aligned}$$

Per quale t si ha $f(t) = 100$? Da $100 = 5 + 195e^{-kt}$ segue

$$-kt = \log(95/195) = \log(19/39).$$

Quindi

$$t = \frac{1}{k}(\log 39 - \log 19) = \frac{\log 39 - \log 19}{\log 19 - \log 9} 40 \sim 38,5.$$

Osservazione. L'equazione differenziale $y' = -k(y - M(t))$ ci dice che quando la temperatura del corpo è vicina a quella dell'ambiente, allora la variazione è lenta. Esempio. Supponiamo $M(t) = 5$ gradi costanti. In quanto tempo il materiale passa da 100 gradi a 10 gradi? Poniamo $100 = 5 + 195e^{-kt_1}$, $10 = 5 + 195e^{-kt_2}$. Il tempo richiesto è $t_2 - t_1$. Da

$$195e^{-kt_1} = 95 \quad , \quad 195e^{-kt_2} = 5$$

segue

$$e^{-kt_1 + kt_2} = \frac{95}{5} \quad , \quad t_2 - t_1 = \frac{\log 19}{k} = \frac{\log 19}{\log 19 - \log 9} 40 \sim 158 \text{ minuti}$$

Invece, per passare da 200 gradi a 100 gradi servono 38,5 minuti.

Esempio 6.6. *Un problema di diluzione.* Un serbatoio contiene 100 litri di salamoia a concentrazione di 2,5 etti di sale per litro. Viene immessa salamoia a concentrazione di 2 etti di sale per litro, alla velocità di 5 litri al minuto; inoltre, per la presenza di un foro nel serbatoio, escono 5 litri di salamoia in ogni minuto. La salamoia viene mantenuta uniforme per agitazione. Determinare la funzione $y(t)$ che misura la quantità di sale presente nel serbatoio all'istante t. (Ovviamente nell'intervallo di tempo in cui è presente sale nel serbatoio).

Soluzione. Partiamo da $t = 0$. Al tempo t sono entrati $5t$ litri di salamoia ed usciti $5t$ litri di salamoia, quindi al tempo t ci sono 100 litri di salamoia nel serbatoio. Quanti etti di sale entrano? In un intervallo Δt sono entrati $5\Delta t$ litri di salamoia, e quindi $5 \cdot 2\Delta t$ etti di sale. Quanti ne escono? Devo conoscere la concentrazione al tempo t. Ora al tempo t ci sono 100 litri di salamoia nel serbatoio, e $y(t)$ etti di sale. La concentrazione al tempo t è $\frac{y(t)}{100}$ etti al litro. Quindi nell'intervallo tra t e $t + \Delta t$ escono, in prima approssimazione, $\frac{y(t)}{100} 5\,\Delta t$ etti di sale. Allora ottengo

$$y(t + \Delta t) = y(t) + 5 \cdot 2\Delta t - \frac{y(t)}{100} 5\Delta t$$

e quindi l'equazione differenziale

$$y' + \frac{1}{20} y = 10$$

con condizione iniziale $y(0) = 250$, esprimendo y in etti (possiamo considerare $I = [0, +\infty)$). Quindi $P(t) = \frac{1}{20}$, $Q(t) = 10$.

Come primitiva di $P(t)$ possiamo prendere $A(t) = \frac{1}{20}t$. A questo punto dobbiamo calcolare

$$\int e^{A(t)} Q(t)\, dt = 10 \int e^{\frac{1}{20}t}\, dt$$

Posto $u = \frac{1}{20}t,\ du = \frac{1}{20}\,dt$ si ha

$$10\int e^{\frac{1}{20}t}\,dt = 10\int 20e^u\,du = 200(e^u + C) = 200(e^{\frac{1}{20}t} + C)$$

al variare di $C \in \mathbb{R}$. La soluzione generale di $y' + \frac{1}{20}y = 10$ è

$$y = e^{-A(t)}\int e^{A(t)}Q(t)\,dt = e^{-\frac{1}{20}t}200(e^{\frac{1}{20}t} + C) = 200 + Ce^{-\frac{1}{20}t}$$

al variare di $C \in \mathbb{R}$.

Valutando y per $t = 0$ e imponendo la condizione iniziale $y(0) = 250$ si ottiene

$$200 + C = 250 \quad , \quad C = 50$$

Otteniamo quindi

$$y = 200 + 50e^{-\frac{1}{20}t}$$

In particolare la quantità di sale parte da 250 etti e decresce, rimanendo sempre maggiore di 200 etti. Al limite per $t \to +\infty$, $y \to 200$ etti. Possiamo anche ricavare t in funzione di y, ovviamente per $200 < y \leq 250$:

$$y - 200 = 50e^{-\frac{1}{20}t} \ , \quad \frac{y-200}{50} = e^{-\frac{1}{20}t} \ , \quad e^{\frac{1}{20}t} = \frac{50}{y-200} \ , \quad t = 20\log\left(\frac{50}{y-200}\right).$$

Alternativa. Prendiamo

$$A(t) = \int_0^t \frac{1}{20}du = \frac{1}{20}[u]_0^t = \frac{1}{20}t$$

La formula risolutiva dà

$$\begin{aligned}
y &= be^{-A(t)} + e^{-A(t)}\int_0^t Q(u)e^{A(u)}du \\
&= 250e^{-\frac{1}{20}t} + e^{-\frac{1}{20}t}\int_0^t 10e^{\frac{1}{20}u}du \\
&= 250e^{-\frac{1}{20}t} + e^{-\frac{1}{20}t}10[20e^{\frac{1}{20}u}]_0^t \\
&= 250e^{-\frac{1}{20}t} + e^{-\frac{1}{20}t}10(20e^{\frac{1}{20}t} - 20) \\
&= 250e^{-\frac{1}{20}t} + 200 - 200e^{-\frac{1}{20}t} \\
&= 200 + 50e^{-\frac{1}{20}t}
\end{aligned}$$

#

Esempio 6.7. Un serbatoio contiene 200 litri di una soluzione a concentrazione di 2 grammi per litro. Viene immessa una soluzione a concentrazione di 3 grammi per litro, alla velocità di 5 litri al minuto; inoltre, per la presenza di un foro nel serbatoio, escono 10 litri di soluzione in ogni minuto. La soluzione viene mantenuta uniforme per agitazione. Determinare la funzione $y(t)$ che misura la quantità di soluto presente nel serbatoio all'istante t. (Ovviamente nell'intervallo di tempo in cui è presente soluzione nel serbatoio).

Soluzione. Partiamo da $t = 0$. Al tempo t sono entrati $5t$ litri di soluzione ed usciti $10t$ litri di soluzione, quindi al tempo t ci sono $200 - 5t$ litri di soluzione nel serbatoio. Quanti grammi di soluto entrano? In un intervallo Δt sono entrati $5\Delta t$ litri di soluzione, e quindi $15\Delta t$ grammi di soluto. Quanti ne escono? Devo conoscere la concentrazione al tempo t. Ora al tempo t ci sono $200 - 5t$ litri di soluzione nel serbatoio (il serbatoio si svuota, ed è vuoto per $200 - 5t = 0$ ossia per $t = 40$), e $y(t)$ grammi di soluto. La concentrazione al tempo t è $\frac{y(t)}{200-5t}$ grammi al litro (lavoriamo su $I = [0, 40)$). Quindi nell'intervallo tra t e $t + \Delta t$ escono, in prima approssimazione, $\frac{y(t)}{200-5t} 10\,\Delta t$ grammi di soluto. Otteniamo

$$y(t + \Delta t) = y(t) + 15\Delta t - \frac{y(t)}{200 - 5t} 10\Delta t$$

e quindi, passando al limite $\Delta t \to 0$, l'equazione differenziale

$$y' + \frac{2}{40 - t} y = 15$$

con condizione iniziale $y(0) = 400$. Quindi $P(t) = \frac{2}{40-t}$, $Q(t) = 15$.

Come primitiva di $P(t)$ possiamo prendere $A(t) = -2 \log(40 - t)$ (tenendo conto di I: attenzione ai segni!). Si ha

$$e^{A(t)} = \frac{1}{(40 - t)^2} \quad , \quad e^{-A(t)} = (40 - t)^2$$

A questo punto dobbiamo calcolare

$$\int e^{A(t)} Q(t)\, dt = 15 \int \frac{1}{(40 - t)^2}\, dt$$

Posto $u = 40 - t,\ du = -\, dt$ si ha

$$15 \int \frac{1}{(40 - t)^2}\, dt = -15 \int \frac{1}{u^2}\, du = \frac{15}{u} + C = \frac{15}{40 - t} + C$$

al variare di $C \in \mathbb{R}$. La soluzione generale di $y' + \frac{2}{40-t} y = 15$ è

$$y = e^{-A(t)} \int e^{A(t)} Q(t)\, dt = (40 - t)^2 \left(\frac{15}{40 - t} + C \right) = 15(40 - t) + C(40 - t)^2$$

al variare di $C \in \mathbb{R}$.

Valutando y per $t = 0$ e imponendo la condizione iniziale $y(0) = 400$ si ottiene

$$15 \cdot 40 + 40^2 C = 400 \quad , \quad 15 + 40C = 10 \quad , \quad C = -\frac{1}{8}$$

Otteniamo quindi

$$y = 15(40 - t) - \frac{1}{8}(40 - t)^2$$

che si può anche scrivere come

$$y = 400 - 5t - \frac{t^2}{8}$$

oppure

$$y = \frac{1}{8}(40-t)(t+80)$$

Osserviamo che la concentrazione all'istante t è

$$\frac{-\frac{1}{8}(40-t)^2 + 15(40-t)}{200-5t} = -\frac{1}{40}(40-t) + 3 = \frac{1}{40}t + 2$$

Alternativa. Prendiamo

$$A(t) = \int_0^t \frac{2}{40-u}du = 2[-\log(40-u)]_0^t = 2(-\log(40-t) + \log 40).$$

Osserviamo che

$$\begin{aligned} e^{-2(-\log(40-t)+\log 40)} &= (e^{(-\log(40-t)+\log 40)})^{-2} = (40-t)^2 40^{-2} \\ e^{2(-\log(40-t)+\log 40)} &= (e^{(-\log(40-t)+\log 40)})^{2} = (40-t)^{-2} 40^{2} \end{aligned}$$

quindi la formula risolutiva dà

$$\begin{aligned} y &= be^{-A(t)} + e^{-A(t)} \int_0^t Q(u)e^{A(u)}du \\ &= 400e^{-2(-\log(40-t)+\log 40)} + e^{-2(-\log(40-t)+\log 40)} \int_0^t 15e^{2(-\log(40-t)+\log 40)}du \\ &= \frac{1}{4}(40-t)^2 + (40-t)^2 40^{-2} \int_0^t 15(40-u)^{-2}40^2 du \\ &= \frac{1}{4}(40-t)^2 + 15(40-t)^2[(40-u)^{-1}]_0^t \\ &= \frac{1}{4}(40-t)^2 + 15(40-t)^2((40-t)^{-1} - 40^{-1}) \\ &= \frac{1}{4}(40-t)^2 + 15(40-t) - 15(40-t)^2 40^{-1} \\ &= \ -\frac{1}{8}(40-t)^2 + 15(40-t) = 400 - 5t - \frac{t^2}{8} \end{aligned}$$

in quanto $e^{-2(-\log(40-t)+\log 40)} = (e^{(-\log(40-t)+\log 40)})^{-2} = (40-t)^2 40^{-2}$.

#

Esempio 6.8. Un serbatoio contiene 20 litri di una soluzione in cui sono disciolti 10 grammi di soluto. Viene immessa una soluzione a concentrazione di 3 grammi per litro, alla velocità di 3 litri al minuto; inoltre, per la presenza di un foro nel serbatoio, escono 2 litri di soluzione in ogni minuto. La soluzione viene mantenuta uniforme per agitazione. Determinare la funzione $y(t)$ che misura la quantità di soluto presente nel serbatoio all'istante t. (Ovviamente nell'intervallo di tempo in cui è presente soluzione nel serbatoio).

Soluzione. Partiamo da $t = 0$. Al tempo t sono entrati $3t$ litri di soluzione ed usciti $2t$ litri di soluzione, quindi al tempo t ci sono $20 + t$ litri di soluzione nel serbatoio. Quanti grammi di soluto entrano? In un intervallo Δt sono entrati $3\Delta t$ litri di soluzione, e quindi $9\Delta t$ grammi di soluto. Quanti ne escono? Devo conoscere la concentrazione al tempo t. Ora al tempo t ci sono $20 + t$ litri di soluzione nel serbatoio, e $y(t)$ grammi di soluto. La concentrazione al tempo t è $\frac{y(t)}{20+t}$ grammi al litro. Quindi nell'intervallo tra t e $t + \Delta t$ escono, in prima approssimazione, $\frac{y(t)}{20+t} 2\,\Delta t$ grammi di soluto. Otteniamo

$$y(t + \Delta t) = y(t) + 9\Delta t - \frac{y(t)}{20 + t} 2\Delta t$$

e, passando la limite $\Delta t \to 0$, l'equazione differenziale

$$y' + \frac{2}{20 + t} y = 9$$

con condizione iniziale $y(0) = 10$. Quindi $P(t) = \frac{2}{20+t}$, $Q(t) = 9$. Studiamo il problema nell'intervallo $[0, +\infty)$ (anche se poi ad un certo punto il serbatoio sarà pieno).

Come primitiva di $P(t)$ possiamo prendere $A(t) = 2 \log(20 + t)$ (tenendo conto di I). Si ha

$$e^{A(t)} = (20 + t)^2 \quad , \quad e^{-A(t)} = \frac{1}{(20 + t)^2}$$

A questo punto dobbiamo calcolare

$$\int e^{A(t)} Q(t)\, dt = 9 \int (20 + t)^2\, dt$$

Posto $u = 20 + t,\ du = dt$ si ha

$$9 \int (20 + t)^2\, dt = 9 \int u^2\, du = 3u^3 + C = 3(20 + t)^3 + C$$

al variare di $C \in \mathbb{R}$. La soluzione generale di $y' + \frac{2}{20+t} y = 9$ è

$$y = e^{-A(t)} \int e^{A(t)} Q(t)\, dt = \frac{1}{(20 + t)^2} \big(3(20 + t)^3 + C\big) = 3(20 + t) + \frac{C}{(20 + t)^2}$$

al variare di $C \in \mathbb{R}$.

Valutando y per $t = 0$ e imponendo la condizione iniziale $y(0) = 10$ si ottiene

$$60 + \frac{C}{400} = 10 \quad , \quad \frac{C}{400} = -50 \quad , \quad C = -20000$$

Otteniamo quindi

$$y = 3(20 + t) - \frac{20000}{(20 + t)^2}$$

La concentrazione all'istante t è

$$\frac{3(20 + t) - \frac{20.000}{(20+t)^2}}{20 + t} = 3 - \frac{20.000}{(20 + t)^3}$$

Alternativa. Prendiamo

$$A(t) = \int_0^t \frac{2}{20+u} du = 2[\log(20+u)]_0^t = 2(\log(20+t) - \log 20).$$

La formula risolutiva dà

$$\begin{aligned} y &= be^{-A(t)} + e^{-A(t)} \int_0^t Q(u) e^{A(u)} du \\ &= 10e^{-2(\log(20+t)-\log 20)} + e^{-2(\log(20+t)-\log 20)} \int_0^t 9e^{2(\log(20+t)-\log 20)} du \\ &= 10(20+t)^{-2}20^2 + (20+t)^{-2}20^2 \int_0^t 9(20+u)^2 20^{-2} du \\ &= 10(20+t)^{-2}20^2 + 9(20+t)^{-2} \left[\frac{1}{3}(20+u)^3\right]_0^t \\ &= 10(20+t)^{-2}20^2 + 3(20+t)^{-2}((20+t)^3 - 20^3) \\ &= (20+t)^{-2}(10 \cdot 20^2 + 3(20+t)^3 - 3 \cdot 20^3) \\ &= (20+t)^{-2}(3(20+t)^3 - 5 \cdot 10 \cdot 20^2) \\ &= (20+t)^{-2}(3(20+t)^3 - 20.000) \\ &= 3(20+t) - \frac{20.000}{(20+t)^2} \end{aligned}$$

in quanto $e^{-2(\log(20+t)-\log 20)} = (e^{(\log(20+t)-\log 20)})^{-2} = (20+t)^{-2}20^2$.

#

7. Equazioni lineari del secondo ordine

Se I è intervallo di $\mathbb{R}$, e $p, q, b : I \to k$ sono funzioni continue, si ha l'*equazione lineare del secondo ordine*

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = b(t) \tag{no}$$

e la sua *equazione omogenea associata*

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0. \tag{o}$$

Per soluzione di (no) si intende ogni funzione $\varphi \in C^2(I, k)$ tale che sia

$$\varphi''(t) + p(t)\varphi'(t) + q(t)\varphi(t) = b(t)$$

identicamente in I; analogo è ovviamente il significato di soluzione per l'equazione (o).

È importante il seguente fatto

Proposizione 7.1. *Combinazioni lineari di soluzioni dell'equazione omogenea (o) sono ancora soluzioni dell'equazione omogenea stessa.*

Dimostrazione. Se φ, ψ sono soluzioni dell'omogenea, si ha

$$\varphi''(t) + p(t)\varphi'(t) + q(t)\varphi(t) = 0$$
$$\psi''(t) + p(t)\psi'(t) + q(t)\psi(t) = 0$$

Se $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ sono costanti, moltiplicando la prima equazione per c_1 e la seconda per c_2 e sommando si ottiene, ricordando che $c_1\varphi''(t) + c_2\psi''(t) = (c_1\varphi + c_2\psi)''(t)$, $c_1\varphi'(t) + c_2\psi'(t) = (c_1\varphi + c_2\psi)'(t)$,

$$(c_1\varphi + c_2\psi)''(t) + p(t)(c_1\varphi + c_2\psi)'(t) + q(t)(c_1\varphi + c_2\psi)(t) = 0$$

che prova appunto che $c_1\varphi + c_2\psi$ è soluzione dell'equazione omogenea. #

Anche nel caso dell'equazione del primo ordine ciò era vero: si osservi che tutte le soluzioni della omogenea di ordine 1 sono i multipli di una fissata funzione, $e^{-A(t)}$, dove $A(t)$ è una fissata primitiva di $P(t)$.

8. Equazioni a coefficienti costanti

Non esistono formule risolutive per le equazioni differenziali lineari del secondo ordine. Un caso in cui la formula risolutiva c'è ancora è quello delle equazioni a coefficienti costanti, ossia quello in cui le funzioni p e q sono delle costanti. Trattiamo per ora il solo caso omogeneo. In questo caso possiamo considerare in generale equazioni di grado n-simo. È comodo utilizzare il seguente formalismo.

Indichiamo con D l'operatore che ad una funzione (derivabile) f associa la sua derivata f': quindi $Df = D(f) = f'$.

A questo punto, se f è derivabile n volte, possiamo considerare le derivate successive $f', f'', \dots, f^{(n)}$. Tutte queste si possono ottenere semplicemente applicando più volte D:

$$f' = Df \quad , \quad f'' = D^2 f \quad , \quad f''' = D^3 f \quad , \quad \dots \quad , \quad f^{(n)} = D^n f$$

Poniamo anche $D^0 = 1$ (ossia $f = D^0 f$). Dati n numeri reali $a_1, \dots, a_n$, possiamo costruire l'operatore $L = D^n + a_1 D^{n-1} + \dots + a_{n-1} D + a_n D^0$, ad esempio $L = D^3 + 4D^2 - \pi D - 14$. Applicando L alla funzione f si ottiene

$$L(f) = f^{(n)} + a_1 f^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} f' + a_n f$$

nell'esempio

$$L(f) = f''' + 4f'' - \pi f' - 14f$$

Osserviamo che l'operatore L è un operatore lineare, ossia soddisfa

$$L(f + g) = L(f) + L(g) \quad , \quad L(cf) = cL(f)$$

per ogni f, g funzioni di I in $\mathbb{R}$ e per ogni $c \in \mathbb{R}$ (è conseguenza diretta delle proprietà della derivata).

Un'equazione differenziale lineare omogenea dell'n-simo ordine a coefficienti costanti si può scrivere come

$$(*) \qquad y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = 0$$

dove $a_1, \ldots, a_n$ sono numeri reali. Posto $L = D^n + a_1 D^{n-1} + \cdots + a_{n-1} D + a_n D^0$, si tratta quindi di risolvere $L(f) = 0$. Ad $(*)$ associamo il polinomio

$$\chi(X) = X^n + a_1 X^{n-1} + \cdots + a_{n-1} X + a_n$$

detto il *polinomio caratteristico* di $(*)$. L'equazione

$$\chi(X) = 0$$

è detta l'*equazione caratteristica* di $(*)$.

Se α (in $\mathbb{R}$ oppure in $\mathbb{C}$) è una radice del polinomio caratteristico (ossia una soluzione dell'equazione caratteristica), si verifica facilmente che la funzione $y = e^{\alpha x}$ è una soluzione di $(*)$. Infatti, da $y = e^{\alpha x}$ segue $y' = \alpha e^{\alpha x}$, $y'' = \alpha^2 e^{\alpha x}$ e in genere $y^{(n)} = \alpha^n e^{\alpha x}$. Sostituendo in $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y$ si ottiene

$$\alpha^n e^{\alpha x} + a_1 \alpha^{n-1} e^{\alpha x} + \cdots + a_{n-1} \alpha e^{\alpha x} + a_n e^{\alpha x} = e^{\alpha x}(\alpha^n + a_1 \alpha^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\alpha + a_n) = e^{\alpha x}\chi(\alpha)$$

ma stiamo assumendo che α sia una radice di $\chi(X)$, ossia $\chi(\alpha) = 0$, e pertanto

$$\alpha^n e^{\alpha x} + a_1 \alpha^{n-1} e^{\alpha x} + \cdots + a_{n-1} \alpha e^{\alpha x} + a_n e^{\alpha x} = e^{\alpha x}\chi(\alpha) = 0$$

cioè $y = e^{\alpha x}$ è una soluzione di $(*)$.

In generale, se m è la molteplicità di α come radice del polinomio caratteristico (ricordo che m è il massimo intero per cui $(x - \alpha)^m$ divide $\chi(X)$), si verifica che le m funzioni

$$v_1(x) = e^{\alpha x},\ v_2(x) = x e^{\alpha x}, \ldots,\ v_m(x) = x^{m-1} e^{\alpha x}$$

sono soluzioni di $(*)$. Infatti

$$(D - \alpha)(x^k e^{\alpha x}) = k x^{k-1} e^{\alpha x} + \alpha x^k e^{\alpha x} - \alpha x^k e^{\alpha x} = k x^{k-1} e^{\alpha x}$$

$$(D-\alpha)^2 (x^k e^{\alpha x}) = (D-\alpha)(k x^{k-1} e^{\alpha x}) = k(k-1) x^{k-2} e^{\alpha x} + \alpha k x^{k-1} e^{\alpha x} - \alpha k x^{k-1} e^{\alpha x} = k(k-1) x^{k-2} e^{\alpha x}$$

e in generale

$$(D - \alpha)^n (x^k e^{\alpha x}) = k(k-1)(k-2)\cdots(k-n+1) x^{k-n} e^{\alpha x}$$

per $n = 1, 2, \dots, k$. Quindi alla fine, per $n = k$, si trova

$$(D-\alpha)^k(x^k e^{\alpha x}) = k(k-1)(k-2)\cdots(k-k+1)x^{k-k}e^{\alpha x} = k!\, e^{\alpha x}$$

e applicando $D - \alpha$ ancora una volta

$$(D-\alpha)^{k+1}(x^k e^{\alpha x}) = (D-\alpha)k!\, e^{\alpha x} = k!\,(\alpha e^{\alpha x} - \alpha e^{\alpha x}) = 0$$

per ogni $k = 0, 1, \dots$. Pertanto

$$(D-\alpha)^m(x^k e^{\alpha x}) = 0$$

per ogni $k = 0, \dots, m-1$.

Se $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ sono le radici (in $\mathbb{C}$) di $\chi(X)$ con molteplicità rispettivamente $m_1, \dots, m_r$ (e quindi $\chi(X) = (x-\alpha_1)^{m_1}(x-\alpha_2)^{m_2}\cdots(x-\alpha_r)^{m_r}$) allora la soluzione generale di $(*)$ è della forma

$$y = c_{11}e^{\alpha_1 x} + \cdots + c_{1m_1}x^{m_1-1}e^{\alpha_1 x} + \cdots + c_{r1}e^{\alpha_r x} + \cdots + c_{rm_r}x^{m_r-1}e^{\alpha_r x}$$

al variare dei coefficienti c_{ij} (che in tutto sono n) in $\mathbb{R}$.

Esempio 8.1. $y''' - y' = 0$

Soluzione. Il polinomio caratteristico è $X^3 - X$. Essendo $X^3 - X = X(X-1)(X+1)$ le radici del polinomio caratteristico sono $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -1$ ciascuna con molteplicità 1. Troviamo

$$u_1(x) = e^{0x} = 1, \quad u_2(x) = e^x, \quad u_3(x) = e^{-x}$$

e la soluzione generale di $y''' - y' = 0$ è

$$y = c_1 + c_2 e^x + c_3 e^{-x}$$

al variare di c_1, c_2, c_3 in $\mathbb{R}$. #

Esempio 8.2. $y''' = 0$

Soluzione. Il polinomio caratteristico è X^3, che ha la sola radice $\lambda = 0$ con molteplicità 3. Troviamo

$$u_1(x) = e^{0x} = 1, \quad u_2(x) = xe^{0x} = x, \quad u_3(x) = x^2 e^{0x} = x^2$$

e la soluzione generale di $y''' = 0$ è

$$y = c_1 + c_2 x + c_3 x^2$$

al variare di c_1, c_2, c_3 in $\mathbb{R}$. #

Esempio 8.3. $y'' + y' - 6y = 0$

Soluzione. Il polinomio caratteristico è X^2+X-6X. Le radici del polinomio caratteristico sono $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -3$ ciascuna con molteplicità 1 ($X^2 + X - 6X = 0$ se e solo se $X = 2, -3$ e $X^2 + X - 6X = (X-2)(X+3)$). Troviamo

$$u_1(x) = e^{2x}, \quad u_2(x) = e^{-3x}$$

e la soluzione generale di $y'' + y' - 6y = 0$ è

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-3x}$$

al variare di c_1, c_2 in $\mathbb{R}$. #

Esempio 8.4. $y'' + y = 0$

Soluzione. Il polinomio caratteristico è $X^2 + 1$. Le radici del polinomio caratteristico sono $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$ (non reali, complesse coniugate) ciascuna con molteplicità 1 ($X^2+1 = 0$ se e solo se $X = i, -i$ e $X^2 + 1 = (X-i)(X+i)$). Troviamo

$$u_1(x) = e^{ix}, \quad u_1(x) = e^{-ix}$$

e la soluzione generale di $y'' + y = 0$ è

$$y = c_1 e^{ix} + c_2 e^{-ix}$$

al variare di c_1, c_2 in $\mathbb{R}$. In questo caso si usa descrivere le soluzioni di $y'' + y = 0$ in un altro modo, che permette di esprimere la soluzione generale come combinazione lineare di funzioni reali.

Ricordando le formule di Eulero

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \qquad , \qquad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \qquad , \qquad e^{-ix} = \cos x - i \sin x$$

per $x \in \mathbb{R}$, si verifica facilmente che posto

$$v_1(x) = \cos x, \quad v_1(x) = \sin x$$

la soluzione generale (nei reali) di $y'' + y = 0$ è

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

al variare di c_1, c_2 in $\mathbb{R}$. #

Tornando al caso di una equazione lineare omogenea del secondo ordine a coefficienti costanti

$$y'' + ay' + by = 0$$

con a, $b \in \mathbb{R}$, il polinomio caratteristico è $X^2 + aX + b$, con equazione caratteristica $X^2 + aX + b = 0$. Indichiamo con Δ il discriminante del polinomio caratteristico:

(1) $\Delta > 0$. Siano α, β le radici (reali distinte) dell'equazione caratteristica. Poniamo allora $u_1(x) = e^{\alpha x}$, $u_2(x) = e^{\beta x}$. La soluzione generale è

$$y = c_1 e^{\alpha x} + c_2 e^{\beta x}$$

al variare di c_1, $c_2 \in \mathbb{R}$.

(2) $\Delta = 0$. Sia α la radice dell'equazione caratteristica (reale, con molteplicità 2). Poniamo allora $u_1(x) = e^{\alpha x}$, $u_2(x) = xe^{\alpha x}$. La soluzione generale è

$$y = c_1 e^{\alpha x} + c_2 x e^{\alpha x}$$

al variare di c_1, $c_2 \in \mathbb{R}$.

(3) $\Delta < 0$. Siano $\alpha + i\beta$, $\alpha - i\beta$ le radici (distinte, non reali, coniugate complesse) dell'equazione caratteristica. Poniamo allora $u_1(x) = e^{\alpha x} \cos \beta x$, $u_2(x) = e^{\alpha x} \sin \beta x$. La soluzione generale è

$$y = c_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + c_2 e^{\alpha x} \sin \beta x$$

al variare di c_1, $c_2 \in \mathbb{R}$.

9. Esempi ed esercizi

Esercizio. $y'' + y' - 6y = 0$

Soluzione. L'equazione caratteristica è $X^2 + X - 6 = 0$, che ha come radici $X = -3, 2$. La soluzione generale è quindi $y = c_1 e^{-3t} + c_2 e^{2t}$ al variare di c_1, $c_2 \in \mathbb{R}$. #

Esercizio. $y'' + 14y' + 49y = 0$

Soluzione. L'equazione caratteristica è $X^2 + 14X + 49 = 0$, che ha come radice $X = -7$ con molteplicità 2. La soluzione generale è quindi $y = c_1 e^{-7t} + c_2 t\, e^{-7t}$ al variare di c_1, $c_2 \in \mathbb{R}$. #

Esercizio. $y'' + 14y' + 58y = 0$

Soluzione. L'equazione caratteristica è $X^2 + 14X + 58 = 0$. Le soluzioni sono

$$-7 \pm \sqrt{49 - 58} = -7 \pm \sqrt{-9} = -7 \pm 3i$$

La soluzione generale è quindi $y = c_1 e^{-7t} \cos 3t + c_2 e^{-7t} \sin 3t$ al variare di c_1, $c_2 \in \mathbb{R}$. #

Esercizio. $y'' - 5y' + 6y = 0$

Soluzione. L'equazione caratteristica è $X^2 - 5X + 6 = 0$, che ha $X = 2$ e $X = 3$ come radici. La soluzione generale è $y = c_1 e^{2t} + c_2 e^{3t}$ al variare di c_1, $c_2 \in \mathbb{R}$. #

Esercizio. $y'' = 0$

Soluzione. L'equazione caratteristica è $X^2 = 0$, che ha $X = 0$ come radice doppia. La soluzione generale è $y = c_1 e^{0t} + c_2 t e^{0t} = c_1 + c_2 t$ al variare di c_1, $c_2 \in \mathbb{R}$. #

Esercizio. $y'' + py' = 0$, $p \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Soluzione. L'equazione caratteristica è $X^2 + pX = 0$, che ha come soluzioni $X = 0$ e $X = -p$; la soluzione generale è $y = c_1 + c_2 e^{-pt}$ al variare di c_1, $c_2 \in \mathbb{R}$ in quanto $p \neq 0$. #

Esercizio. $y'' - \omega^2 y = 0$, con $\omega \in \mathbb{R}$, $\omega > 0$ (ossia ω reale positivo).

Soluzione. L'equazione caratteristica è $X^2 - \omega^2 = 0$, che ha come radici $X = \pm\omega$. La soluzione generale è quindi $y = c_1 e^{\omega t} + c_2 e^{-\omega t}$ al variare di c_1, $c_2 \in \mathbb{R}$. #

Esercizio. $y'' + \omega^2 y = 0$, con $\omega \in \mathbb{R}$, $\omega > 0$ (ossia ω reale positivo).

Soluzione. L'equazione caratteristica $X^2 + \omega^2 = 0$ ha come soluzioni $X = \pm i\omega$. La soluzione generale è quindi $y = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t$ al variare di c_1, $c_2 \in \mathbb{R}$. #

L'equazione $y'' + \omega^2 y = 0$ ($\omega > 0$) è detta *equazione dell'oscillatore armonico.* Si abbia un punto materiale di massa m, libero di scorrere senza attrito su una retta, su cui c'e un sistema di ascisse y; l'unica forza attiva agente sul punto sia un forza di richiamo di tipo elastico, proporzionale cioè all'*elongazione*, che è la distanza dall'origine del sistema di ascisse scelto sulla retta. L'equazione della dinamica (massa $\times$ accelerazione = forza) diventa allora $m\ddot{y} = -ky$ (usiamo la convenzione, universale in dinamica, secondo la quale un punto al di sopra di una funzione denota la derivata di tale funzione rispetto al tempo, e due punti denotano quindi la derivata seconda, che nelle ipotesi precedenti è la componente dell'accelerazione secondo la retta considerata; $k > 0$ è una costante; se la forza fosse dovuta ad una molla, k ne sarebbe la costante elastica; più k è grande, e più la molla è potente; il segno $-$ si deve al fatto che la forza è sempre diretta verso l'origine delle coordinate). Posto $\omega = \sqrt{k/m}$, l'equazione si riscrive $y'' + \omega^2 y = 0$. Ogni moto che obbedisce a tale equazione differenziale è detto armonico. Le possibili leggi del moto armonico sono quindi (è chiaro che le leggi del moto sono funzioni a valori reali!) tutte e sole le funzioni della forma $y = c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t)$ al variare di c_1, $c_2 \in \mathbb{R}$.

Per proprietà elementari di trigonometria, la soluzione generale può anche essere scritta nella forma $y = a\cos(\omega t + \phi)$, $a \geq 0$, $\phi \in \mathbb{R}$ ($a \geq 0$ **ampiezza**, ϕ **fase iniziale**, ω **pulsazione**, $\tau = 2\pi/\omega$ **periodo**, $\nu = 1/\tau = \omega/(2\pi)$ **frequenza**).

10. Tecniche risolutive per alcune equazioni non omogenee

Per l'equazione lineare del secondo ordine non omogenea, una volta noto l'integrale (o soluzione) generale della omogenea, basta conoscere una soluzione particolare per conoscerle tutte, come segue dalla seguente

Proposizione 10.1. *L'insieme delle soluzioni dell'equazione*

$$y'' + ay' + by = R(t) \tag{no}$$

dove $a,\, b \in \mathbb{R}$, $R : I \to \mathbb{R}$ *è una funzione continua, si ottiene aggiungendo ad una soluzione particolare* f *della non omogenea l'insieme delle soluzioni della omogenea associata*

$$y'' + ay' + by = 0 \tag{o}$$

In altre parole, tutte le soluzioni di (no) sono della forma $f + g$*, al variare di* g *nell'integrale generale dell'omogenea associata.*

Dimostrazione. Poniamo $L = D^2 + aD + b$. Quindi (no) equivale a risolvere $L(f) = R(t)$, mentre (o) equivale a $L(g) = 0$.

Siano allora f, g tali che $L(f) = R(t)$ e $L(g) = 0$. Per la proprietà di linearità di L, si ha

$$L(f + g) = L(f) + L(g) = R(t) + 0 = R(t)$$

e quindi $f + g$ è soluzione di $R(t)$.

Se poi f_1 è un'altra soluzione della non omogenea, un calcolo identico a quello appena fatto mostra che $f_1 - f$ è soluzione dell'omogenea associata:

$$L(f_1 - f) = L(f_1) - L(f) = R(t) - R(t) = 0$$

Posto $g(t) = f_1(t) - f(t)$, g è soluzione dell'omogenea associata e $f_1 = f + g$, porgendo la forma voluta per f_1. #

Se è noto l'integrale generale dell'omogenea, c'è un metodo, detto della *variazione delle costanti*, dovuto a Lagrange, che permette di trovare soluzioni della equazione non omogenea. Rimandiamo per questo al testo. Qui intendiamo occuparci di equazioni a coefficienti costanti, con termine noto di tipo particolare.

11. Casi particolari

Nel caso in cui il termine noto sia una costante, od un polinomio, od una funzione esponenziale o trigonometrica, c'e un metodo semplice (detto dei *coefficienti indeterminati*) per trovare un integrale particolare della non omogenea; tale metodo richiede solo derivazioni, e risoluzione di equazioni lineari.

Anzitutto si ha la seguente

Proposizione 11.1. *Si consideri un'equazione del tipo*

$$(*) \qquad y'' + ay' + by = R_1(t) + \cdots + R_m(t)$$

in cui il secondo membro sia somma di funzioni $R_1, \ldots, R_m$ continue su I (I intervallo di $\mathbb{R}$). Se per ogni $j = 1, \ldots, m$ si ha un soluzione particolare f_j dell'equazione $y'' + ay' + by = R_j(t)$, allora $f(t) = f_1(t) + \cdots + f_m(t)$ è soluzione particolare dell'equazione $(*)$.

Dimostrazione. Posto $L = D^2 + aD + b$, da $L(f_i) = R_i(t)$ segue

$$L(f) = L(f_1 + \cdots + f_m) = L(f_1) + \cdots + L(f_m) = R_1(t) + \cdots + R_m(t)$$

#

Consideriamo adesso equazioni differenziali del tipo

$$y'' + ay' + by = R(x)$$

dove a, $b \in \mathbb{R}$, $R(x)$ è della forma

$$R(x) = P(x), \quad R(x) = e^{\mu x}P(x), \quad R(x) = e^{\alpha x}P(x)\cos\beta x, \quad R(x) = e^{\alpha x}P(x)\sin\beta x$$

dove $P(x)$ è un polinomio, μ, α, β sono numeri reali (con $\beta \neq 0$).

Utilizzeremo la seguente definizione: sia z un numero complesso, $T(x)$ un polinomio. Diciamo che z ha molteplicità $m = \mathrm{molt}(z)$ in T se $(x - z)^m$ divide $T(x)$ ma $(x - z)^{m+1}$ non divide $T(x)$. Pertanto $\mathrm{molt}(z) \geq 1$ se e solo se z è uno zero di T, ossia se e solo se $T(z) = 0$. Se invece z non è uno zero di T, ossia se $T(z) \neq 0$, allora $\mathrm{molt}(z) = 0$.

Esempio 11.1. Sia $T(x) = x^2$. Allora $\mathrm{molt}(0) = 2$, $\mathrm{molt}(1) = 0$ e in genere $\mathrm{molt}(z) = 0$ per ogni numero complesso $z \neq 0$. #

Esempio 11.2. Sia $T(x) = x^2 - 1$. Allora $\mathrm{molt}(0) = 0$, $\mathrm{molt}(1) = 1$, $\mathrm{molt}(-1) = 1$ e in genere $\mathrm{molt}(z) = 0$ per ogni numero complesso $z \neq 1, -1$. #

Esempio 11.3. Sia $T(x) = x^2 + 1$. Allora $\mathrm{molt}(0) = 0$, $\mathrm{molt}(1) = 0$, $\mathrm{molt}(-1) = 0$, $\mathrm{molt}(i) = \mathrm{molt}(-i) = 1$ e in genere $\mathrm{molt}(z) = 0$ per ogni numero complesso $z \neq i, -i$. #

Esempio 11.4. Sia $T(x) = x^2+3x-10 = (x-2)(x+5)$. Allora $\mathrm{molt}(0) = 0$, $\mathrm{molt}(2) = 1$, $\mathrm{molt}(-5) = 1$ e in genere $\mathrm{molt}(z) = 0$ per ogni numero complesso $z \neq 2, -5$. #

Esempio 11.5. Sia $T(x) = x^2 + x = x(x + 1)$. Allora $\mathrm{molt}(0) = 1$, $\mathrm{molt}(-1) = 1$, e in genere $\mathrm{molt}(z) = 0$ per ogni numero complesso $z \neq 0, -1$. #

Esempio 11.6. Sia $T(x) = x^2 - 4x + 13$. In questo caso il discriminante è negativo e le radici sono $2 + 3i$, $2 - 3i$. Allora $\mathrm{molt}(0) = 0$, $\mathrm{molt}(2 + 3i) = \mathrm{molt}(2 - 3i) = 1$, e in genere $\mathrm{molt}(z) = 0$ per ogni numero complesso $z \neq 2 + 3i, 2 - 3i$. #

Caso 1: $R(x) = P(x)$ è un polinomio di grado n.

Cerco una soluzione particolare del tipo

$$y = x^h Q(x)$$

dove h è la molteplicità di 0 nel polinomio caratteristico $X^2 + aX + b$ e $Q(x)$ è un polinomio di grado n. Quindi

$$h = \begin{cases} 0 & \text{se } b \neq 0 \\ 1 & \text{se } b = 0 \text{ e } a \neq 0 \\ 2 & \text{se } a = b = 0 \end{cases}$$

Caso 2: $R(x) = e^{\mu x} P(x)$ dove $P(x)$ è un polinomio di grado n, $\mu \in \mathbb{R}$.

Cerco una soluzione particolare del tipo

$$y = x^h e^{\mu x} Q(x)$$

dove h è la molteplicità di μ nel polinomio caratteristico $X^2 + aX + b$ e $Q(x)$ è un polinomio di grado n. Quindi

$$h = \begin{cases} 0 & \text{se } \mu^2 + a\mu + b \neq 0 \\ 1 & \text{se } X^2 + aX + b = (X - \mu)(X - \nu) \text{ con } \nu \neq \mu \\ 2 & \text{se } X^2 + aX + b = (X - \mu)^2 \end{cases}$$

Caso 3: $R(x) = e^{\alpha x} P(x) \sin \beta x$ dove $P(x)$ è un polinomio di grado n, α, $\beta \in \mathbb{R}$, con $\beta \neq 0$

Cerco una soluzione particolare del tipo

$$y = x^h e^{\alpha x} (Q_1(x) \sin \beta x + Q_2(x) \cos \beta x)$$

dove h è la molteplicità di $\alpha + i\beta$ nel polinomio caratteristico $X^2 + aX + b$ e $Q_1(x)$, $Q_2(x)$ sono polinomi di grado al più n (in questo caso h può assumere solo i valori 0, se $\alpha + i\beta$ non è radice di $X^2 + aX + b$, e 1, se $\alpha + i\beta$ è radice di $X^2 + aX + b$).

Caso 4: $R(x) = e^{\alpha x} P(x) \cos \beta x$ dove $P(x)$ è un polinomio di grado n, α, $\beta \in \mathbb{R}$, con $\beta \neq 0$

Cerco una soluzione particolare del tipo

$$y = x^h e^{\alpha x} (Q_1(x) \sin \beta x + Q_2(x) \cos \beta x)$$

dove h è la molteplicità di $\alpha + i\beta$ nel polinomio caratteristico $X^2 + aX + b$ e $Q_1(x)$, $Q_2(x)$ sono polinomi di grado al più n (in questo caso h può assumere solo i valori 0, se $\alpha + i\beta$ non è radice di $X^2 + aX + b$, e 1, se $\alpha + i\beta$ è radice di $X^2 + aX + b$).

Esempio 11.7. Risolvere l'equazione $y'' + 2y' - 3y = 14$.

Soluzione. L'equazione caratteristica è $X^2+2X-3=0$ che ha per soluzioni 1 e -3: la soluzione generale dell'omogenea associata è quindi

$$y = c_1 e^t + c_2 e^{-3t}$$

al variare di c_1, c_2 in $\mathbb{R}$.

Si ha $R(t) = 14$, quindi siamo nel caso 1, con $P(t) = 14$ un polinomio di grado 0.

Cerco quindi una soluzione particolare del tipo $y = t^h Q(t)$, dove $h = \mathrm{molt}(0) = 0$ (in quanto 0 non è radice dell'equazione caratteristica), e $Q(t)$ è un polinomio di grado 0, quindi $Q(t) = a$ per un certo numero reale a da determinare.

Cerco quindi una soluzione particolare del tipo $y = \alpha$, dove α è un numero reale da determinare. Da $y = \alpha$ segue $y' = 0$, $y'' = 0$ e quindi imponendo $y'' + 2y' - 3y = 14$ si ottiene $-3a = 14$, da cui $a = -\frac{14}{3}$. Quindi

$$y = -\frac{14}{3}$$

è una soluzione particolare di $y'' + 2y' - 3y = 14$, e la soluzione generale di $y'' + 2y' - 3y = 14$ si ottiene sommando alla soluzione particolare trovata, la soluzione generale dell'omogenea associata. Pertanto la soluzione generale di $y'' + 2y' - 3y = 14$ è

$$y = -\frac{14}{3} + c_1 e^t + c_2 e^{-3t}$$

al variare di c_1, c_2 in $\mathbb{R}$. #

Esempio 11.8. Risolvere l'equazione $y'' - 3y' + 2y = 6 + 21e^{-5t}$.

Soluzione. L'equazione caratteristica $X^2 - 3X + 2 = 0$ ha come radici 1 e 2: la soluzione generale dell'omogenea associata è quindi

$$y = c_1 e^t + c_2 e^{2t}$$

al variare di c_1, c_2 in $\mathbb{R}$.

Per trovare una soluzione particolare della non omogenea, cerchiamo separatamente una soluzione particolare f di $y'' - 3y' + 2y = 6$ e una soluzione particolare g di $y'' - 3y' + 2y = 21e^{-5t}$: la somma $f + g$ è allora una soluzione particolare di $y'' - 3y' + 2y = 6 + 21e^{-5t}$ per la Proposizione 11.1.

L'equazione $y'' - 3y' + 2y = 6$ ha $R(t) = 6$, un polinomio di grado zero. Poiché 0 non è radice dell'equazione caratteristica cerco una soluzione particolare della forma $y = Q(t)$ con $Q(t)$ un polinomio di grado zero, ossia $Q(t) = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Si ha allora $y = \alpha$, $y' = 0$, $y'' = 0$ e imponendo la condizione $y'' - 3y' + 2y = 6$ si trova

$$0 - 0 + 2\alpha = 6$$

da cui $2\alpha = 6$, $\alpha = 3$. Quindi $f(t) = 3$ è una soluzione particolare di $y'' - 3y' + 2y = 6$.

L'equazione $y'' - 3y' + 2y = 21e^{-5t}$ ha $R(t) = 21e^{-5t}$. Siamo quindi nel Caso 2, con $\mu = -5$ e $P(t) = 21$ un polinomio di grado zero. Poiché -5 non è radice dell'equazione caratteristica, si ha $h = 0$

e quindi cerchiamo una soluzione particolare della forma $y = e^{-5t}Q(t)$ con $Q(t)$ un polinomio di grado zero, ossia $Q(t) = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Cerco pertanto una soluzione particolare delle forma $y = \alpha e^{-5t}$, dove α è un numero reale da determinare. Si ha $y' = -5\alpha e^{-5t}$, $y'' = 25\alpha e^{-5t}$ e imponendo la condizione $y'' - 3y' + 2y = 21e^{-5t}$ si trova

$$25\alpha e^{-5t} - 3(-5)\alpha e^{-5t} + 2\alpha e^{-5t} = 21e^{-5t}$$

$$25\alpha e^{-5t} + 15\alpha e^{-5t} + 2\alpha e^{-5t} = 21e^{-5t}$$

$$42\alpha e^{-5t} = 21e^{-5t}$$

che si riscrive

$$42\alpha = 21$$

da cui $\alpha = \frac{1}{2}$. Quindi $g(t) = \frac{1}{2}e^{-5t}$ è una soluzione particolare di $y'' - 3y' + 2y = 21e^{-5t}$.

A questo punto $f(t) + g(t) = 3 + \frac{1}{2}e^{-5t}$ è una soluzione particolare di $y'' - 3y' + 2y = 6 + 21e^{-5t}$, e la soluzione generale di $y'' - 3y' + 2y = 6 + 21e^{-5t}$ è

$$y = 3 + \frac{1}{2}e^{-5t} + c_1e^t + c_2e^{2t}$$

al variare di c_1, $c_2 \in \mathbb{R}$. #

Esempio 11.9. Risolvere l'equazione $y'' - 3y' + 2y = 4t - 4 + 5e^{2t}$.

Soluzione. L'equazione caratteristica $X^2 - 3X + 2 = 0$ ha come radici 1 e 2: la soluzione generale dell'omogenea associata è quindi

$$y = c_1e^t + c_2e^{2t}$$

al variare di c_1, c_2 in $\mathbb{R}$.

Per trovare una soluzione particolare della non omogenea, cerchiamo separatamente una soluzione particolare f di $y'' - 3y' + 2y = 4t - 4$ e una soluzione particolare g di $y'' - 3y' + 2y = 5e^{2t}$: la somma $f + g$ è allora una soluzione particolare di $y'' - 3y' + 2y = 4t - 4 + 5e^{2t}$.

L'equazione $y'' - 3y' + 2y = 4t - 4$ ha $R(t) = 4t - 4$, un polinomio di grado 1. Poiché 0 non è radice dell'equazione caratteristica cerco una soluzione particolare della forma $y = Q(t)$ con $Q(t)$ un polinomio di grado 1, ossia $Q(t) = \alpha t + \beta$, α, $\beta \in \mathbb{R}$. Si ha allora $y = \alpha t + \beta$, $y' = \alpha$, $y'' = 0$ e imponendo la condizione $y'' - 3y' + 2y = 4t - 4$ si trova

$$0 - 3\alpha + 2(\alpha t + \beta) = 4t - 4$$

$$2\alpha t - 3\alpha + 2\beta = 4t - 4$$

da cui imponendo l'uguaglianza dei coefficienti corrispondenti

$$\begin{cases} 2\alpha & = 4 \\ -3\alpha + 2\beta & = -4 \end{cases}$$

si trova $\alpha = 2$, $\beta = 1$. Quindi $f(t) = 2t + 1$ è una soluzione particolare di $y'' - 3y' + 2y = 4t - 4$.

L'equazione $y'' - 3y' + 2y = 5e^{2t}$ ha $R(t) = 5e^{2t}$. Siamo quindi nel Caso 2, con $\mu = 2$ e $P(t) = 5$ un polinomio di grado zero. Poiché 2 è radice dell'equazione caratteristica con $\mathrm{molt}(2) = 1$ (in quanto $X^2 - 3X + 2 = (X-1)(X-2)$) cerco una soluzione particolare della forma $y = te^{2t}Q(t)$ con $Q(t)$ un polinomio di grado zero, ossia $Q(t) = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Cerco pertanto una soluzione particolare delle forma $y = \alpha\, t\, e^{2t}$, dove α è un numero reale da determinare. Si ha

$$\begin{aligned} y' &= \alpha e^{2t} + 2\alpha t e^{2t} \\ y'' &= 2\alpha e^{2t} + 2\alpha e^{2t} + 4\alpha t e^{2t} = 4\alpha e^{2t} + 4\alpha t e^{2t} \end{aligned}$$

e imponendo la condizione $y'' - 3y' + 2y = 5e^{2t}$ si trova

$$\begin{aligned} 4\alpha e^{2t} + 4\alpha t e^{2t} - 3(\alpha e^{2t} + 2\alpha t e^{2t}) + 2\alpha\, t\, e^{2t} &= 5e^{2t} \\ 4\alpha e^{2t} + 4\alpha t e^{2t} - 6\alpha t e^{2t} - 3\alpha e^{2t} + 2\alpha\, t\, e^{2t} &= 5e^{2t} \\ \alpha e^{2t} &= 5e^{2t} \end{aligned}$$

(osserviamo come i termini che coinvolgono $t\, e^{2t}$ alla fine si elidano). Si ottiene quindi $\alpha = 5$. Pertanto $g(t) = 5te^{2t}$ è una soluzione particolare di $y'' - 3y' + 2y = 5e^{2t}$.

A questo punto $f(t) + g(t) = 2t + 1 + 5te^{2t}$ è una soluzione particolare di $y'' - 3y' + 2y = 4t - 4 + 5e^{2t}$, e la soluzione generale di $y'' - 3y' + 2y = 4t - 4 + 5e^{2t}$ è

$$y = 2t + 1 + 5te^{2t} + c_1 e^t + c_2 e^{2t}$$

al variare di c_1, $c_2 \in \mathbb{R}$. #

Esempio 11.10. Risolvere l'equazione $y'' + y' = 14$.

Soluzione. L'equazione caratteristica è $X^2 + X = 0$, che ha 0 e -1 come radici: la soluzione generale dell'omogenea associata è quindi

$$y = c_1 + c_2 e^{-t}$$

al variare di c_1, c_2 in $\mathbb{R}$.

Si ha $R(t) = 14$, quindi siamo nel caso 1, con $P(t) = 14$ un polinomio di grado 0.

Cerco quindi una soluzione particolare del tipo $y = t^h Q(t)$, dove $h = \mathrm{molt}(0) = 1$ (in quanto 0 è radice dell'equazione caratteristica e $X^2 + X = X(X+1)$), e $Q(t)$ è un polinomio di grado 0, quindi $Q(t) = \alpha$ per un certo numero reale α da determinare.

Cerco quindi una soluzione particolare del tipo $y = \alpha t$, dove α è un numero reale da determinare. Da $y = \alpha t$ segue $y' = \alpha$, $y'' = 0$ e quindi imponendo $y'' + y' = 14$ si ottiene $0 + \alpha = 14$, da cui $\alpha = 14$. Quindi

$$y = 14t$$

è una soluzione particolare di $y'' + y' = 14$, e la soluzione generale di $y'' + y' = 14$ si ottiene sommando alla soluzione particolare trovata, la soluzione generale dell'omogenea associata. Pertanto la soluzione generale di $y'' + y' = 14$ è

$$y = 14t + c_1 + c_2 e^{-t}$$

al variare di c_1, c_2 in $\mathbb{R}$. #

Esempio 11.11. Risolvere l'equazione $y'' = 12t$.

Soluzione. L'equazione caratteristica $X^2 = 0$ ha come radice 0 con molteplicità 2: la soluzione generale dell'omogenea associata è quindi

$$y = c_1 + c_2 t$$

al variare di c_1, c_2 in $\mathbb{R}$.

L'equazione $y'' = 12t$ ha $R(t) = 12t$, un polinomio di grado 1. Poiché 0 è radice dell'equazione caratteristica, con $\mathrm{molt}(0) = 2$, cerco una soluzione particolare della forma $y = t^h Q(t)$ con $h = 2$ e con $Q(t)$ un polinomio di grado 1, ossia $Q(t) = \alpha t + \beta$, α, $\beta \in \mathbb{R}$. Si ha allora $y = t^2(\alpha t + \beta)$,

$$\begin{aligned} y &= \alpha t^3 + \beta t^2 \\ y' &= 3\alpha t^2 + 2\beta t \\ y'' &= 6\alpha t + 2\beta \end{aligned}$$

e imponendo la condizione $y'' = 12t$ si trova

$$6\alpha t + 2\beta = 12t$$

da cui imponendo l'uguaglianza dei coefficienti corrispondenti

$$\begin{cases} 6\alpha \qquad = 12 \\ \qquad 2\beta = 0 \end{cases}$$

si trova $\alpha = 2$, $\beta = 0$. Quindi $f(t) = 2t^3$ è una soluzione particolare di $y'' = 12t$ e la soluzione generale di $y'' = 12t$ è

$$y = 2t^3 + c_1 + c_2 t$$

al variare di c_1, $c_2 \in \mathbb{R}$.

Osserviamo che per risolvere l'equazione $y'' = 12t$, si può direttamente integrare due volte, trovando $y' = 6t^2 + C$, $y = 2t^3 + Ct + D$ al variare di C, $D \in \mathbb{R}$. #

Esempio 11.12. Risolvere l'equazione $y'' + 4y = 40e^{-2x} \cos 4x$.

Soluzione. L'equazione caratteristica $X^2+4=0$ ha come radici $\pm 2i$: la soluzione generale dell'omogenea associata è quindi

$$y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x$$

al variare di c_1, c_2 in $\mathbb{R}$.

L'equazione $y'' + 4y = 40e^{-2x} \cos 4x$ ha $R(x) = 40e^{-2x} \cos 4x$. Siamo quindi nel Caso 4, con $\alpha = -2$, $\beta = 4$ e $P(x) = 40$ un polinomio di grado zero. Poiché $-2+4i$ non è radice dell'equazione caratteristica, si ha $h = 0$ e quindi cerchiamo una soluzione particolare della forma

$$y = Q_1(x)e^{-2x} \sin 4x + Q_2(x)e^{-2x} \cos 4x$$

dove $Q_1(x)$, $Q_2(x)$ sono polinomi di grado al più 0, ossia $Q_1(x) = a$, $Q_2(x) = b$, a e b numeri reali da determinare. Da $y = ae^{-2x} \sin 4x + be^{-2x} \cos 4x$ segue

$$y' = e^{-2x}((4a - 2b)\cos(4x) - 2(a + 2b)\sin(4x)) \quad , \quad y'' = -4e^{-2x}((3a - 4b)\sin(4x) + (4a + 3b)\cos(4x))$$

e imponendo la condizione $y'' + 4y = 40e^{-2x} \cos 4x$ si trova

$$\begin{aligned} -4e^{-2x}((3a - 4b)\sin 4x + (4a + 3b)\cos 4x) + 4(ae^{-2x} \sin 4x + be^{-2x} \cos 4x) &= 40e^{-2x} \cos 4x \\ -8e^{-2x}((a - 2b)\sin 4x + (2a + b)\cos 4x) &= 40e^{-2x} \cos 4x \\ e^{-2x}(-8(a - 2b)\sin 4x - 8(2a + b)\cos 4x) &= 40e^{-2x} \cos 4x \end{aligned}$$

da cui imponendo l'uguaglianza dei coefficienti corrispondenti

$$\begin{cases} -8(a-2b) & = 0 \\ -8(2a+b) & = 40 \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} a - 2b & = 0 \\ 2a + b & = -5 \end{cases}$$

si trova $b = -1$, $a = -2$. Quindi $y = -2e^{-2x} \sin 4x - e^{-2x} \cos 4x$ è una soluzione particolare di $y'' + 4y = 40e^{-2x} \cos 4x$ e la soluzione generale di $y'' + 4y = 40e^{-2x} \cos 4x$ è

$$y = -2e^{-2x} \sin 4x - e^{-2x} \cos 4x + c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x$$

al variare di c_1, $c_2 \in \mathbb{R}$. #

Esempio 11.13. Risolvere l'equazione $y'' + 25y = 18x \cos 4x$.

Soluzione. L'equazione caratteristica $X^2+25=0$ ha come radici $\pm 5i$: la soluzione generale dell'omogenea associata è quindi

$$y = c_1 \cos 5x + c_2 \sin 5x$$

al variare di c_1, c_2 in $\mathbb{R}$.

L'equazione $y'' + 25y = 18x \cos 4x$ ha $R(x) = 18x \cos 4x$. Siamo quindi nel Caso 4, con $\alpha = 0$, $\beta = 4$ e $P(x) = 18x$ un polinomio di grado 1. Poiché $4i$ non è radice dell'equazione caratteristica, si ha $h = 0$ e quindi cerchiamo una soluzione particolare della forma

$$y = Q_1(x) \sin 4x + Q_2(x) \cos 4x$$

dove $Q_1(x)$, $Q_2(x)$ sono polinomi di grado al più 1, ossia $Q_1(x) = ax + b$, $Q_2(x) = cx + d$, a, b, c e d numeri reali da determinare. Da $y = (ax + b) \sin 4x + (cx + d) \cos 4x$ segue

$$y' = (4ax+4b+c) \cos 4x + (a-4cx-4d) \sin 4x \quad , \quad y'' = -8(2ax+2b+c) \sin 4x + (2(cx+d)-a)) \cos 4x$$

e imponendo la condizione $y'' + 25y = 18x \cos 4x$ si trova

$$\begin{aligned} -8(2ax + 2b + c) \sin 4x + (2(cx + d) - a)) \cos 4x + 25((ax + b) \sin 4x + (cx + d) \cos 4x) &= 18x \cos 4x \\ (9ax + 9b - 8c) \sin 4x + (8a + 9(cx + d)) \cos 4x &= 18x \cos 4x \\ 9ax \sin 4x + (9b - 8c) \sin 4x + 9cx \cos 4x + (8a + 9d) \cos 4x &= 18x \cos 4x \end{aligned}$$

da cui imponendo l'uguaglianza dei coefficienti corrispondenti

$$\begin{cases} 9a & & & = 0 \\ & 9b - 8c & & = 0 \\ & & 9c & = 18 \\ 8a & & + 9d & = 0 \end{cases}$$

si trova $a = 0$, $d = 0$, $c = 2$, $9b = 8c$, $b = \frac{16}{9}$. Quindi $y = \frac{16}{9} \sin 4x + 2 \cos 4x$ è una soluzione particolare di $y'' + 25y = 18x \cos 4x$ e la soluzione generale di $y'' + 25y = 18x \cos 4x$ è

$$y = \frac{16}{9} \sin 4x + 2 \cos 4x + c_1 \cos 5x + c_2 \sin 5x$$

al variare di c_1, $c_2 \in \mathbb{R}$. #

Riprendiamo l'oscillatore armonico introdotto precedentemente. Supponiamo però ora che oltre alla forza di richiamo di tipo elastico ci sia anche una forza esterna $f_e(t)$ applicata al punto materiale, che può variare col tempo t. L'equazione della dinamica diventa allora $m\ddot{y} = -ky + f_e(t)$ da cui, dividendo per m, e posto $\omega = \sqrt{k/m}$, $a_e(t) = f_e(t)/m$, si ottiene l'equazione

$$(*) \qquad \ddot{y} + \omega^2 y = a_e(t),$$

che è l'equazione dei moti armonici con termine forzante $a_e(t)$. Studiamo ora vari casi particolari.

Supponiamo dapprima $f_e(t) =$ costante, e quindi $a_e(t) = a_e$ costante. In tal caso l'equazione non omogenea ha una soluzione particolare costante $y = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$ da determinare (in quanto $\omega > 0$ in particolare implica $\omega \neq 0$). Imponendo la condizione si ottiene $\omega^2\alpha = a_e$ e quindi $\alpha = a_e/\omega^2$ e l'integrale generale dell'equazione data è

$$y = \frac{a_e}{\omega^2} + c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t)$$

al variare di c_1, c_2 in $\mathbb{R}$, che si può anche scrivere come

$$y = a\cos(\omega t + \phi) + \frac{a_e}{\omega^2}$$

con $a \geq 0$, $\phi \in \mathbb{R}$ (individuato a meno di multipli di 2π). Ciò si può interpretare dicendo che l'effetto di una forza esterna costante è quello di spostare il centro di oscillazione di una quantità pari ad $a_e/\omega^2 = f_e/(m\omega^2)$ nella direzione della forza stessa, lasciando invariate ampiezza a e periodo $2\pi/\omega$ delle oscillazioni stesse.

Supponiamo ora $f_e(t) = F_e \cos(\omega_e t)$, dove F_e, $\omega_e > 0$ sono costanti; abbiamo cioè un termine forzante di tipo sinusoidale. Scritto $a_e = F_e/m$, dobbiamo trovare una soluzione particolare dell'equazione

$$\text{(fo)} \qquad \ddot{y} + \omega^2 y = a_e \cos(\omega_e t)$$

Siamo nel Caso 4, con $R(t) = e^{\alpha t}P(t)\cos\beta t$, dove $\alpha = 0$, $P(t) = a_e$ (una costante) e $\beta = \omega_e$. Cerchiamo quindi una soluzione particolare del tipo

$$y = t^h(a\cos\omega_e t + b\sin\omega_e t)$$

dove a, b sono numeri reali da determinare e $h = \text{molt}(i\omega_e)$ nel polinomio caratteristico $X^2 + \omega^2$. Le radici di $X^2 + \omega^2$ sono $i\omega$ e $-i\omega$. Essendo entrambi ω e ω_e positivi, si ha $\text{molt}(i\omega_e) = 0$ se $\omega_e \neq \omega$ e $\text{molt}(i\omega_e) = 1$ se $\omega_e = \omega$.

Supponiamo $\omega_e \neq \omega$. In questo caso $h = 0$,

$$y = (a\cos\omega_e t + b\sin\omega_e t)\ ,\ y' = (-a\omega_e \sin\omega_e t + b\omega_e \cos\omega_e t)\ ,\ y'' = (-a\omega_e^2 \cos\omega_e t - b\omega_e^2 \sin\omega_e t)$$

Imponendo $y'' + \omega^2 y = a_e \cos(\omega_e t)$ si ottiene

$$(-a\omega_e^2 \cos\omega_e t - b\omega_e^2 \sin\omega_e t) + \omega^2(a\cos\omega_e t + b\sin\omega_e t) = a_e\cos(\omega_e t)$$

$$a(\omega^2 - \omega_e^2)\cos\omega_e t + b(\omega^2 - \omega_e^2)\sin\omega_e t = a_e \cos(\omega_e t)$$

e quindi

$$\begin{cases} a(\omega^2 - \omega_e^2) = a_e \\ b(\omega^2 - \omega_e^2) = 0 \end{cases}$$

ossia

$$a = \frac{a_e}{\omega^2 - \omega_e^2} \quad , \quad b = 0$$

Pertanto

$$y = \frac{a_e}{\omega^2 - \omega_e^2} \cos(\omega_e t)$$

è una soluzione particolare di (fo). La soluzione generale risulta

$$y = \frac{a_e}{\omega^2 - \omega_e^2} \cos(\omega_e t) + c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t)$$

al variare di c_1, c_2 in $\mathbb{R}$, che si può anche scrivere come

(nonris) $$y = a\cos(\omega t + \varphi) + \frac{a_e}{\omega^2 - \omega_e^2} \cos(\omega_e t) \qquad a \geq 0,\ \varphi \in \mathbb{R}$$

Consideriamo ora il caso $\omega_e = \omega$. In quasto caso si ha $h = 1$ e quindi cerchiamo una soluzione particolare del tipo

$$y = t(a\cos\omega_e t + b\sin\omega_e t)$$

dove a, b sono numeri reali da determinare. Si ha

$$y' = a\cos(t\omega) + b\sin(t\omega) + t(b\omega\cos(t\omega) - a\omega\sin(t\omega))$$

$$y'' = 2b\omega\cos(t\omega) - 2a\omega\sin(t\omega) + t\omega^2\left(-a\cos(t\omega) - b\sin(t\omega)\right)$$

e imponendo $y'' + \omega^2 y = a_e \cos\omega t$ si trova

$$2b\omega\cos(t\omega) - 2a\omega\sin(t\omega) + t\omega^2\left(-a\cos(t\omega) - b\sin(t\omega)\right) + \omega^2 t(a\cos\omega_e t + b\sin\omega_e t) = a_e\cos\omega t$$

$$2\omega(b\cos(t\omega) - a\sin(t\omega)) = a_e\cos\omega t$$

e quindi

$$\begin{cases} -2\omega a &= 0 \\ \ \ 2\omega b &= a_e \end{cases}$$

ossia

$$a = 0 \quad , \quad b = \frac{a_e}{2\omega}$$

Pertanto

$$y = \frac{a_e}{2\omega}\, t\, \sin(\omega t)$$

è una soluzione particolare di $y'' + \omega^2 y = a_e\cos\omega t$. La soluzione generale risulta

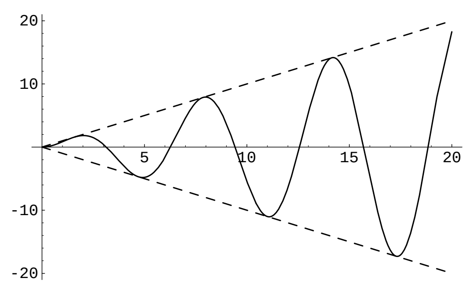
$$y = \frac{a_e}{2\omega}\, t\, \sin(\omega t) + c_1\cos(\omega t) + c_2\sin(\omega t)$$

al variare di c_1, c_2 in $\mathbb{R}$, che si può anche scrivere come

(ris.) $$y = a\cos(\omega t + \varphi) + \frac{a_e}{2\omega}\, t\, \sin(\omega t) \qquad a \geq 0,\ \varphi \in \mathbb{R}$$

Si noti che nessuna delle soluzioni è in questo caso limitata. È questo il fenomeno della *risonanza*: si ha un sistema, che lasciato a se stesso oscillerebbe armonicamente con frequenza propria $\omega/2\pi$.

Sottoposto ad una forza esterna periodica di tipo sinusoidale, $F_e \cos(\omega_e t)$, finchè la frequenza $\omega_e/2\pi$ della sollecitazione è diversa da quella propria del sistema, ossia $\omega_e \neq \omega$, il sistema ha un moto limitato, anche se in generale non più periodico, come si vede da (nonris); si noti però che l'ampiezza delle "oscillazioni" di tale moto cresce al tendere della frequenza forzante alla frequenza propria, se l'ampiezza a_e del termine forzante rimane costante ($\lim_{\omega_e \to \omega} |a_e/(\omega^2 - \omega_e^2)| = +\infty$). Se invece $\omega_e = \omega$ l'ampiezza massima delle "oscillazioni" cresce illimitatamente (con andamento lineare nel tempo): vedi la figura dove c'è il grafico del moto del punto che all'istante 0 è in $y = 0$ con velocità iniziale nulla, $\varphi(t) = a_e\, t\, \sin(\omega t)/(2\omega)$.



12. Oscillazioni smorzate

Supponiamo ora che l'oscillatore sia sottoposto ad una resistenza di tipo viscoso, cioè proporzionale alla velocità. In assenza di altre forze esterne l'equazione della dinamica è quindi

$$m\ddot{y} = -\varrho\dot{y} - ky$$

dove $\varrho > 0$ è un coefficiente (possiamo pensare che l'oscillatore consista di una palla pesante che scorre su una sbarra orizzontale immersa in un fluido. C'è una molla di costante elastica $k > 0$ che attacca la palla alla sbarra: più il fluido è viscoso e più ϱ è grande). Dividendo per m e posto $2r = \varrho/m$, $\alpha = \sqrt{k/m}$ si ha l'equazione

$$\ddot{y} + 2r\dot{y} + \alpha^2 y = 0$$

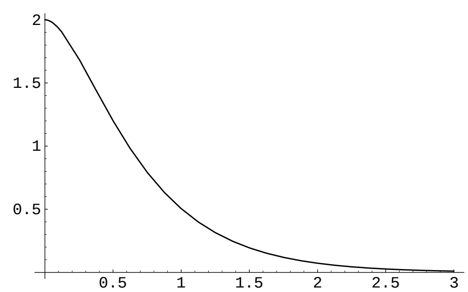
la cui risoluzione ci è ben nota: l'equazione caratteristica è $X^2 + 2rX + \alpha^2 = 0$, che ha per radici $X = -r \pm \mu$, dove $\mu \in \mathbb{C}$ è tale che $\mu^2 = r^2 - \alpha^2$. Le radici di tale equazione, (come per ogni equazione di secondo grado a coefficienti reali!) possono essere reali distinte, reali coincidenti, o complesse coniugate. Distinguiamo quindi i tre casi.

Caso 1: radici reali distinte. Questo caso si verifica esattamente quando $r^2 - \alpha^2 > 0$, cioè per $r > \alpha$. Siamo quindi nella situazione di una resistenza viscosa grande rispetto alla forza elastica (si pensi che il fluido sia miele!). I moti possibili sono

$$y = c_1 e^{-(r-\mu)t} + c_2 e^{-(r+\mu)t}$$

al variare di c_1, $c_2 \in \mathbb{R}$. Si noti che entrambe le radici dell'equazione caratteristica sono negative, in quanto $r - \mu > 0, r + \mu > 0$, per cui tutte le soluzioni tendono alla posizione di equilibrio $y = 0$ senza oscillare: a seconda della velocità iniziale, il sistema può tendere decrescendo esponenzialmente all'equilibrio, oppure può raggiungere una massima elongazione $|y|$, che poi decresce esponenzialmente a zero. In questo secondo caso, dall'istante t_0 in cui la velocità è nulla, se in quel punto è $y(t_0) = y_0 \neq 0$, il moto segue la legge:

$$y(t) = \frac{y_0}{\mu} e^{-r(t-t_0)} \left(\mu \cosh(\mu(t-t_0)) + r \sinh(\mu(t-t_0))\right)$$



dove nella figura si è posto $t_0 = 0$. La derivata di tale funzione è

$$y'(t) = -\alpha^2 \frac{y_0}{\mu} e^{-r(t-t_0)} \sinh(\mu(t-t_0)),$$

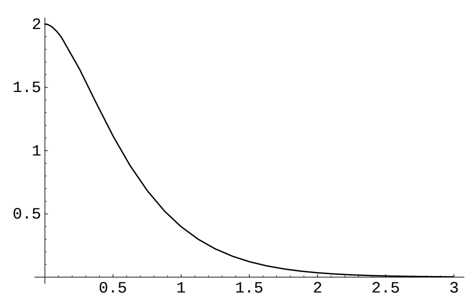
nulla solo per $t = t_0$, e (se $y_0 > 0$) negativa per $t > t_0$.

Caso 2: radici reali coincidenti. Questo caso si verifica esattamente quando $r^2 - \alpha^2 = 0$ e cioè per $r = \alpha$ (in quanto stiamo assumendo $r > 0$, $\alpha > 0$). I moti possibili sono

$$y = c_1 e^{-rt} + c_2 t e^{-rt},$$

al variare di c_1, $c_2 \in \mathbb{R}$. Anche in questo caso le soluzioni tendono all'equilibrio per $t \to +\infty$. Questo è il caso dello smorzamento *critico*. Anche qui, dall'istante in cui la velocità è nulla (supposto che ce ne sia uno) la legge del moto è (si suppone $y_0 = y(t_0) \neq 0$)

$$y(t) = y_0(1 + r(t-t_0))e^{-r(t-t_0)}$$



e la velocità segue la legge

$$y'(t) = -r^2 y_0 (t - t_0) e^{-r(t-t_0)}.$$

Su vari strumenti oscillanti, ad esempio bilance, vengono installati smorzatori con il compito di annullare le oscillazioni dello strumento: è bene che lo smorzamento sia il più possibile vicino a quello critico, perchè altrimenti il tempo richiesto per raggiungere una posizione sufficientemente vicina all'equilibrio potrebbe essere inaccettabilmente lungo.

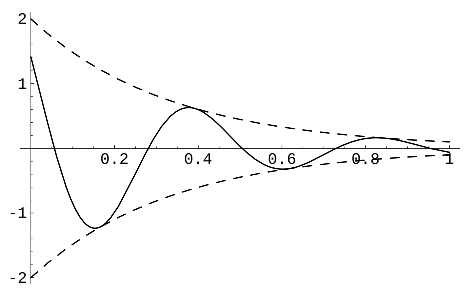
Caso 3: radici complesse coniugate non reali. Questo caso si verifica esattamente quando $r^2 - \alpha^2 < 0$; posto $\omega = \sqrt{\alpha^2 - r^2}$ (quindi $\omega \in \mathbb{R}$), le radici dell'equazione caratteristica sono $-r \pm i\omega$, ed i possibili moti sono

$$y(t) = e^{-rt}(c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t))$$

al variare di c_1, $c_2 \in \mathbb{R}$. Si può anche scrivere

$$y = a \cos(\omega t + \phi) e^{-rt}$$

(con $a = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$, $\cos \phi = c_1/a$, $\sin \phi = -c_2/a$ nel caso in cui $(c_1, c_2) \neq (0, 0)$).



Si tratta di *moti armonici smorzati*: l'ampiezza delle "oscillazioni" decresce con andamento esponenziale. Commento generale: in tutti e tre i casi discussi, qualunque siano le condizioni iniziali, asintoticamente, ovvero per $t \to +\infty$, il moto del sistema tende alla posizione di equilibrio $y = 0$, che è pertanto detta di "equilibrio asintoticamente stabile". Esaminando i calcoli fatti, si vede che ciò è dovuto al fatto che *le parti reali delle radici dell'equazione caratteristica sono negative.*

13. Oscillatore smorzato con termine forzante

Supponiamo ora che all'oscillatore armonico, oltre che una resistenza viscosa, sia applicata una forza esterna $F_e(t)$ dipendente dal tempo. L'equazione della dinamica è allora

$$m\ddot{y} = -\varrho\dot{y} - ky + F_e(t)$$

che si riscrive

$$\ddot{y} + 2r\dot{y} + \alpha^2 y = a(t)$$

dove $r > 0$, con ovvio significato dei simboli. A noi interessa un termine forzante $a(t)$ di tipo sinusoidale, $a(t) = a_0 \cos(\omega_e t)$, con $a_0, \omega_e > 0$. Studiamo quindi l'equazione differenziale

$$\ddot{y} + 2r\dot{y} + \alpha^2 y = a_0 \cos(\omega_e t)$$

dove $r > 0$, $a_0 > 0$, $\omega_e > 0$.

Siamo nel Caso 4, con $R(t) = e^{\alpha t} P(t) \cos \beta t$, dove $\alpha = 0$, $P(t) = a_0$ (una costante) e $\beta = \omega_e$. Cerchiamo quindi una soluzione particolare del tipo

$$y = t^h (a \cos \omega_e t + b \sin \omega_e t)$$

dove a, b sono numeri reali da determinare e $h = \operatorname{molt}(i\omega_e)$ nel polinomio caratteristico $X^2 + 2rX + \alpha^2$. Essendo $r \neq 0$, si ha $\operatorname{molt}(i\omega_e) = 0$, ossia $h = 0$. Si ha

$$y = (a \cos \omega_e t + b \sin \omega_e t)\ ,\ y' = (-a\omega_e \sin \omega_e t + b\omega_e \cos \omega_e t)\ ,\ y'' = (-a\omega_e^2 \cos \omega_e t - b\omega_e^2 \sin \omega_e t)$$

Imponendo $y'' + 2ry' + \alpha^2 y = a_0 \cos(\omega_e t)$ si ottiene

$$(-a\omega_e^2 \cos \omega_e t - b\omega_e^2 \sin \omega_e t) + 2r(-a\omega_e \sin \omega_e t + b\omega_e \cos \omega_e t) + \alpha^2 (a \cos \omega_e t + b \sin \omega_e t) = a_0 \cos(\omega_e t)$$

$$\left(2br\omega_e + a\left(\alpha^2 - \omega_e^2\right)\right) \cos(\omega_e t) + \left(b\left(\alpha^2 - \omega_e^2\right) - 2ar\omega_e\right) \sin(\omega_e t) = a_0 \cos(\omega_e t)$$

e quindi

$$\begin{cases} 2br\omega_e + a\left(\alpha^2 - \omega_e^2\right) & = a_0 \\ b\left(\alpha^2 - \omega_e^2\right) - 2ar\omega_e & = 0 \end{cases}$$

ossia

$$a = \frac{a_0\left(\alpha^2 - \omega_e^2\right)}{\alpha^4 - 2\omega_e^2\alpha^2 + \omega_e^4 + 4r^2\omega_e^2} \quad , \quad b = \frac{2a_0 r\omega_e}{\alpha^4 - 2\omega_e^2\alpha^2 + \omega_e^4 + 4r^2\omega_e^2}$$

o anche

$$a = \frac{a_0\left(\alpha^2 - \omega_e^2\right)}{(\alpha^2 - \omega_e^2)^2 + 4r^2\omega_e^2} \quad , \quad b = \frac{2a_0 r\omega_e}{(\alpha^2 - \omega_e^2)^2 + 4r^2\omega_e^2}$$

Pertanto

$$\begin{aligned} y &= \frac{a_0\left(\alpha^2 - \omega_e^2\right)}{(\alpha^2 - \omega_e^2)^2 + 4r^2\omega_e^2} \cos(\omega_e t) + \frac{2a_0 r\omega_e}{(\alpha^2 - \omega_e^2)^2 + 4r^2\omega_e^2} \sin(\omega_e t) \\ &= \frac{a_0}{(\alpha^2 - \omega_e^2)^2 + 4r^2\omega_e^2} \left(\left(\alpha^2 - \omega_e^2\right) \cos(\omega_e t) + 2r\omega_e \sin(\omega_e t)\right) \end{aligned}$$

è una soluzione particolare di $y'' + 2ry' + \alpha^2 y = a_0 \cos(\omega_e t)$.

Osserviamo che si può anche scrivere

$$y = \frac{a_0}{\sqrt{(\alpha^2 - \omega_e^2)^2 + 4r^2\omega_e^2}} \cos(\omega_e t + \eta)$$

dove

$$\cos\eta = (\alpha^2 - \omega_e^2)/\sqrt{(\alpha^2 - \omega_e^2)^2 + 4r^2\omega_e^2}$$
$$\sin\eta = -2r\omega_e/\sqrt{(\alpha^2 - \omega_e^2)^2 + 4r^2\omega_e^2}.$$

L'equazione

$$\ddot{y} + 2r\dot{y} + \alpha^2 y = a_0 \cos(\omega_e t)$$

dei moti armonici smorzati con termine forzante sinusoidale ha quindi come soluzione generale

$$y(t) = \varphi_{\rm staz}(t) + \varphi(t)$$

dove

$$\varphi_{\rm staz}(t) = \frac{a_0}{\sqrt{(\alpha^2 - \omega_e^2)^2 + 4r^2\omega_e^2}} \cos(\omega_e t + \eta)$$

è la soluzione particolare trovata prima, e dove $\varphi(t)$ è la soluzione generale della omogenea associata descritta nei vari casi nella sezione precedente.

Come visto un precedenza, poiché le radici dell'equazione caratteristica hanno parte reale negativa, dopo un tempo più o meno lungo il termine $\varphi(t)$ è trascurabile: questa prima fase viene chiamata *regime transitorio*, dopo il quale resta l'altro termine $\varphi_{\rm staz}$ dovuto alla forza sinusoidale esterna: si è in *regime stazionario*. Si noti che tutte le soluzioni dell'equazione dei moti armonici smorzati con termine forzante sinusoidale sono limitate su $[0, +\infty)$: se c'è attrito, non c'è risonanza, almeno non nel senso della sezione precedente. Tuttavia, se l'attrito è piccolo, e la frequenza $\omega_e/2\pi$ della sollecitazione è vicina a quella propria $\alpha/2\pi$ del sistema senza attrito, l'ampiezza

$$a = \frac{a_0}{\sqrt{(\alpha^2 - \omega_e^2)^2 + 4r^2\omega_e^2}}$$

delle oscillazioni forzate può essere molto grande.

14. Circuiti LCR

Rileviamo infine che la stessa equazione differenziale descrive il comportamento di semplici circuiti elettrici con un generatore, induttanza L, capacità C e resistenza R collegati in serie (circuiti LCR). Rimandando per la giustificazione di ciò ai testi di elettrologia, l'equazione di un tale circuito si scrive ($I(t)$ è l'intensità di corrente nel circuito, $E(t)$ la forza elettromotrice)

$$L\,\frac{d^2I}{dt^2} + R\,\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}I = E'(t)$$

identica all'equazione della dinamica scritta al numero precedente per l'oscillatore smorzato con forza esterna applicata, con l'induttanza L al posto della massa, la resistenza R al posto della resistenza viscosa, e la capacità, o meglio il suo reciproco, come forza elastica. Se consideriamo una forza elettromotrice alternata $E(t) = E_0 \sin(\omega_e t)$ l'equazione diventa

$$L \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} I = E_0\, \omega_e \cos(\omega_e t)$$

e la soluzione stazionaria, cioè la risposta a regime del circuito, è data da (basta porre, nell'equazione che definisce φ_{staz} al numero precedente, $1/\sqrt{LC}$ in luogo di α, $R/(2L)$ in luogo di r, $E_0\omega_e/L$ in luogo di a_0)

$$I_{\text{staz}}(t) = \frac{E_0}{Z} \cos(\omega_e t + \varepsilon)$$

dove

$$\begin{aligned} Z &= \sqrt{\left(\frac{1}{\omega_e C} - \omega_e L\right)^2 + R^2} \\ \cos\varepsilon &= \frac{1/(\omega_e C) - \omega_e L}{Z} \\ \sin\varepsilon &= -\frac{R}{\omega_e Z} \end{aligned}$$

dipendono da ω_e. In particolare Z è detta *impedenza* del circuito elettrico considerato. Essa è minima quando $\dfrac{1}{\omega_e C} - \omega_e L = 0$, come facilmente si vede, e cioè per $\omega_e = 1/\sqrt{LC}$; il massimo di E_0/Z si ha quindi per tale ω_e e vale E_0/R, tanto più grande quanto più piccolo è R: in condizioni di piccola resistenza eccitazioni di pulsazione vicina a quella propria del circuito, che è $\alpha = 1/\sqrt{LC}$, danno luogo ad oscillazioni molto ampie della corrente.