Istituzioni di Matematiche Modulo B (SG)

I foglio di esercizi

ESERCIZIO 1. Per ciascuna funzione disegnare le curve di livello corrispondenti agli assegnati valori di c.

$$\begin{array}{lll} (a) & f(x,y) = x^2 + y^2, & c = 0, 1, 4, 9 \\ (b) & f(x,y) = e^{xy}, & c = e^{-2}, e^{-1}, 1, e, e^2, e^3 \\ (c) & f(x,y) = \cos(x+y), & c = \,-1, 0, 1/2, \sqrt{2}/2, 1 \end{array}$$

SOLUZIONE.

(a) Le curve di livello sono circonferenze di centro l'origine e raggio rispettivamente 0, 1, 2, 3.

(b) Sia $c \in \mathbb{R}$. La curva di livello $e^{xy} = c$ è per definizione

$$\mathcal{C} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid e^{xy} = c\}$$

Sappiamo che la funzione $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^>$, $t \mapsto e^t$ è biiettiva (strettamente crescente). Ricordo che $\mathbb{R}^> = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\} = (0, +\infty)$. Quindi se $c \leq 0$, $\mathcal{C}$ non ha punti. Sia allora $c > 0$. Esiste un unico $d \in \mathbb{R}$ tale che $c = e^d$. Allora $e^{xy} = c$ se e solo se $xy = d$, proprio perchè g è biiettiva. Quindi

$$\mathcal{C} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = d\}$$

Se $c \neq 1$, ossia se $d \neq 0$, $\mathcal{C}$ è un'iperbole. Nel caso $c = 1$, ossia $d = 0$, $\mathcal{C}$ è l'unione dei due assi cartesiani.

(c) Sia $\mathcal{C} : \cos(x+y) = -1$. Si tratta di determinare tutte le coppie (x,y) tali che $\cos(x+y) = -1$. Sappiamo che $\cos t = -1$ se e solo se $t = \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ ($\mathbb{Z}$ è l'insieme dei numeri interi). Quindi $\mathcal{C}$ è l'unione di tutte le rette $x + y = \pi + 2k\pi$ al variare di $k \in \mathbb{Z}$. Si tratta di una famiglia infinita di rette parallele.

Analogamente si procede per gli altri valori $c = 0, 1/2, \sqrt{2}/2, 1$.

Sia $\mathcal{C} : \cos(x+y) = 0$. Si tratta di determinare tutte le coppie (x,y) tali che $\cos(x+y) = 0$. Sappiamo che $\cos t = 0$ se e solo se $t = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Quindi $\mathcal{C}$ è l'unione di tutte le rette $x + y = \frac{\pi}{2} + k\pi$ al variare di $k \in \mathbb{Z}$. Si tratta di una famiglia infinita di rette parallele.

Sia $\mathcal{C} : \cos(x+y) = 1/2$. Si tratta di determinare tutte le coppie (x,y) tali che $\cos(x+y) = 1/2$. Sappiamo che $\cos t = 1/2$ se e solo se $t = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ oppure $t = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Quindi $\mathcal{C}$ è l'unione di due famiglie di rette: tutte le rette $x + y = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ al variare di $k \in \mathbb{Z}$ e tutte le rette $x + y = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ al variare di $k \in \mathbb{Z}$. Si tratta di rette parallele.

Sia $\mathcal{C} : \cos(x+y) = \sqrt{2}/2$. Si tratta di determinare tutte le coppie (x,y) tali che $\cos(x+y) = \sqrt{2}/2$. Sappiamo che $\cos t = \sqrt{2}/2$ se e solo se $t = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ oppure $t = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Quindi $\mathcal{C}$

è l'unione di due famiglie di rette: tutte le rette $x+y=\frac{\pi}{4}+2k\pi$ al variare di $k\in\mathbb{Z}$ e tutte le rette $x+y=-\frac{\pi}{4}+2k\pi$ al variare di $k\in\mathbb{Z}$. Si tratta di rette parallele.

Sia $\mathcal{C}:\cos(x+y)=1$. Si tratta di determinare tutte le coppie (x,y) tali che $\cos(x+y)=1$. Sappiamo che $\cos t=1$ se e solo se $t=2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$. Quindi $\mathcal{C}$ è l'unione di tutte le rette $x+y=2k\pi$ al variare di $k\in\mathbb{Z}$. Si tratta di una famiglia infinita di rette parallele. $\square$

ESERCIZIO 2. In ciascuno dei seguenti casi, sia S l'insieme dei punti (x,y) del piano che soddisfano le disuguaglianze assegnate. Fare un disegno dell'insieme S. Determinare la frontiera $F(S)$ di S, e dire se S è chiuso, determinare l'insieme $I(S)$ dei punti interni di S e dire se S è aperto.

$$\begin{array}{ll} (a) & x^2+y^2<4 \quad , \\ (b) & 3x^2+2y^2<6 \quad , \\ (c) & |x|\le 3\ ,\ |y|\le 3 \quad , \\ (d) & y=x^2, -2\le x\le 3 \quad , \\ (e) & 25<x^2+y^2\le 36 \end{array}$$

SOLUZIONE.

Se S è un sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$, $F(S)$ è la frontiera di S, $I(S)$ è l'insieme dei punti interni di S. Ricordo che S è chiuso se contiene la sua frontiera, ossia $F(S)\subseteq S$; S è aperto se coincide con l'insieme dei suoi punti interni, ossia $I(S)=S$.

(a) $S=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2<4\}$. Si ha

$$F(S)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=4\}$$

quindi S non è chiuso.

$$I(S)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2<4\}$$

quindi $S=I(S)$, S è aperto

(b) $S=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 3x^2+2y^2<6\}$. Si ha

$$F(S)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 3x^2+2y^2=6\}$$

quindi S non è chiuso.

$$I(S)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 3x^2+2y^2<6\}$$

quindi $S=I(S)$, S è aperto.

Osservo che $F(S)$ è l'ellisse di equazione $\mathcal{C}:3x^2+2y^2=6$, con centro nell'origine e semiassi lunghi $\sqrt{2}$ (lungo l'asse delle x), $\sqrt{3}$ (lungo l'asse delle y).

(c) $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq 3 \ , \ |y| \leq 3\}$. Osservo che S è il quadrato di vertici $(3,3)$, $(-3,3)$, $(-3,-3)$, $(3,-3)$, di lato 6, con i lati contenuti in S.

Si ha

$$F(S) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| = 3 \ , \ |y| = 3\}$$

sono i 4 lati del quadrato, quindi S è chiuso.

$$I(S) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < 3 \ , \ |y| < 3\}$$

il quadrato meno i 4 lati, quindi $S \neq I(S)$, S è non aperto.

(d) $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2, -2 \leq x \leq 3\}$. Osservo che S è l'arco di parabola $y = x^2$ ottenuto facendo variare x inell'intervallo chiuso e limitato $[-2,3]$.

Sia $P \in \mathbb{R}^2$. Se $P \notin S$, c'è un intorno di P che non interseca S, quindi $P \notin F(S)$. Se $P \in S$, allora addirittura ogni intorno di P interseca sia S sia $\mathbb{R}^2 \setminus S$. Quindi $P \in F(S)$ e dunque

$$F(S) = S$$

ed S è chiuso. Per il ragionamento precedente si conclude anche che non ci sono punti interni, quindi

$$I(S) = \varnothing$$

l'insieme vuoto, pertanto $S \neq I(S)$, S è non aperto.

(e) $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 25 < x^2 + y^2 \leq 36\}$. Osservo che S è la corona circolare di centro l'origine compresa tra le circonferenze di raggio 5 e 6. Tuttavia $\mathcal{C}_1 : x^2 + y^2 = 25$ non è contenuta in S, mentre $\mathcal{C}_2 : x^2 + y^2 = 36$ è contenuta in S.

Si ha

$$F(S) = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$$

l'unione delle 2 circonferenze, quindi S non è chiuso.

$$I(S) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 25 < x^2 + y^2 < 36\}$$

quindi S è non aperto. □

ESERCIZIO 3. Determinare l'insieme di definizione delle seguenti funzioni, e verificare che ciascuna funzione è continua (nel suo insieme di definizione).

$$\begin{aligned}
&(a) \quad f(x,y) = x^4 + y^4 - 4\,x^2 y^2 \quad , \\
&(b) \quad f(x,y) = \log(x^2 + y^2 - 1) \quad , \\
&(c) \quad f(x,y) = \frac{1}{y}\ \cos x^2 \quad , \\
&(d) \quad f(x,y) = \operatorname{tg} \frac{x^2}{y} \quad , \\
&(e) \quad f(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}
\end{aligned}$$

SOLUZIONE.

(a) È definita su tutto $\mathbb{R}^2$ (ciascun addendo è un polinomio).

(b) Ricordo che $\log t$ (log indica il logaritmo in base naturale e, numero di Neper) è definito solo per $t > 0$, quindi la funzione è definita su $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 - 1 > 0\}$, ossia i punti del piano la cui distanza dall'origine è maggiore di 1.

(c) L'unico problema è dato dalla presenza di y a denominatore, quindi la funzione è definita su $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \neq 0\}$, ossia tutto il piano tranne l'asse delle x.

(d) Intanto deve essere $y \neq 0$. Ricordo che $\operatorname{tg} t$ è definita per $t \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ ($\mathbb{Z}$ è l'insieme dei numeri interi). Quindi f è definita su $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \neq 0, \frac{x^2}{y} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

(e) La radice quadrata $\sqrt{t}$ è definta solo per $t \geq 0$, quindi deve essere $x^2 + y^2 \geq 0$ (e questo è sempre vero). Ma c'è $\sqrt{x^2 + y^2}$ a denominatore, quindi bisogna avere $\sqrt{x^2 + y^2} \neq 0$. Quindi f è definita su $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \geq 0,\ x^2 + y^2 \neq 0\}$, ossia su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, tutto il piano tranne l'origine.

In tutti i casi (a), (b), (c), (d), (e) la funzione è continua, in quanto composta di funzioni continue.

□