Istituzioni di Matematiche Modulo B (SG)

II foglio di esercizi

Osservazione. Ricordo che se $f(x, y)$ è una funzione di due variabili, allora

$$\nabla f(x, y) = (f_x(x, y), f_y(x, y)) = f_x(x, y)\underline{i} + f_y(x, y)\underline{j}$$

Se invece $f(x, y, z)$ è una funzione di tre variabili (e quindi non è possibile disegnarne il grafico), allora

$$\nabla f(x, y, z) = (f_x(x, y, z), f_y(x, y, z), f_z(x, y, z)) = f_x(x, y, z)\underline{i} + f_y(x, y, z)\underline{j} + f_z(x, y, z)\underline{k}$$

ESERCIZIO 1. Per ciascuna funzione $f(x, y)$ calcolare le derivate parziali $f_x(x, y)$ e $f_y(x, y)$ e determinare il relativo dominio di definizione.

$$\begin{aligned}
&(a) \quad f(x, y) = x^2 + y^2 \sin(x\,y),\\
&(b) \quad f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2},\\
&(c) \quad f(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}},\\
&(d) \quad f(x, y) = \frac{x + y}{x - y},\\
&(e) \quad f(x, y) = a\,x^2 + b\,x\,y + c\,y^2, \text{ dove } a,\ b,\ c \text{ sono costanti}
\end{aligned}$$

ESERCIZIO 2. Si consideri la superficie $\mathcal{S}$ di equazione

$$z = \sqrt{|xy|}$$

(a) Determinare l'equazione del piano tangente ad $\mathcal{S}$ nel punto $(1, 1, f(1, 1))$.

(b) Determinare l'equazione del piano tangente ad $\mathcal{S}$ nel punto $(-1, 1, f(-1, 1))$.

(c) Determinare l'equazione del piano tangente ad $\mathcal{S}$ nel punto $(-1, -1, f(-1, -1))$.

(d) Determinare l'equazione del piano tangente ad $\mathcal{S}$ nel punto $(1, -1, f(1, -1))$.

(e) Sia $P = (a, b)$ un punto del piano non sugli assi cartesiani. Determinare l'equazione del piano tangente ad $\mathcal{S}$ nel punto $(a, b, f(a, b))$.

ESERCIZIO 3. Si consideri la funzione

$$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}.$$

Per ogni punto $P = (x, y)$ del piano per cui $x^2 + y^2 < 1$ determinare un vettore normale (non nullo) $\underline{n}(x, y)$ alla superficie $\mathcal{S} : z = f(x, y)$ in $(x, y, f(x, y))$.

ESERCIZIO 4. Trovare le equazioni cartesiane (cioè determinare un sistema lineare di due equazioni in x, y e z) della retta r che è tangente ad entrambe le superfici

$$z = \sqrt{2 - x^2/2 - y^2/2} \quad , \quad z = e^{x-y}$$

nel punto $(1, 1, 1)$.

ESERCIZIO 5. Trovare, in tutti i punti in cui esiste, il gradiente delle seguenti funzioni:

$$\begin{array}{llll} (a) & f(x,y) = x^2 + y^2\,\mathrm{tg}(xy), & (d) & f(x,y,z) = x^2 - y^2 + 2z^2, \\ (b) & f(x,y) = e^x \cos y, & (e) & f(x,y,z) = \log x^2 + 2y^2 - 3z^2, \\ (c) & f(x,y,z) = x^2y^3z^4, & (f) & f(x,y,z) = 30 \text{ (la funzione costante 30)} \end{array}$$

ESERCIZIO 6. Sia $f(x,y) = x\,y\,e^{-x\,y}$ ed $\mathcal{S}$ la superficie di equazione $z = f(x,y)$.

(a) Scrivere l'equazione del piano tangente ad $\mathcal{S}$ nel punto $(1, 3, f(1, 3))$.

(b) Scrivere l'equazione della retta tangente alla curva di livello passante per il punto $P = (1, 3)$ nel punto P.

(c) Calcolare la rapidità di variazione di f nel punto P nella direzione del vettore $\underline{v} = 2\underline{i} + \underline{j}$.

ESERCIZIO 7. Si consideri la funzione di due variabili definita nel seguente modo:

$$f(x,y) = y\,\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \quad \text{se } (x,y) \neq (0,0) \quad , \quad f(0,0) = 0.$$

Calcolare, se esistono, le seguenti derivate parziali: $f_x(0,0)$, $f_y(0,0)$, $f_{xy}(0,0)$, $f_{yx}(0,0)$.