# Istituzioni di Matematiche Modulo B (SG)

*III* foglio di esercizi

**ESERCIZIO 1.** Trovare i punti $(x, y)$ con $x^2 + y^2 = 1$ e le direzioni per cui la derivata direzionale di

$$f(x, y) = 3x^2 + y^2$$

ha il suo valore massimo.

**ESERCIZIO 2.** Individuare e classificare i punti critici delle funzioni indicate:

1) $f(x, y) = x^2 + (y - 1)^2$,
2) $f(x, y) = x^2 - (y - 1)^2$,
3) $f(x, y) = (x - y + 1)^2$,
4) $f(x, y) = 2x^2 - xy - 3y^2 - 3x + 7y$,
5) $f(x, y) = x^2 - xy + y^2 - 2x + y$,
6) $f(x, y) = 2x^2 - xy - 3y^2$,
7) $f(x, y) = x^2 - xy + y^2$,
8) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$,
9) $f(x, y) = x\,y\,(5x + 2y - 30)$,
10) $f(x, y) = e^{2x+3y}(8x^2 - 6xy + 3y^2)$,

**ESERCIZIO 3.** Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x, y) = x\ y\ e^{-(x^2+y^2)}$$

per ogni $(x, y)$ in $\mathbb{R}^2$. Determinare i punti di massimo e minimo relativi e i punti di sella.

**ESERCIZIO 4.** Sia $f(x, y) = 3x^4 - 4x^2y + y^2$. Dimostrare che su ogni retta $y = mx$ la restrizione di $f$ ha minimo locale in $P = (0, 0)$. Dimostrare che tuttavia $P$ non è di minimo locale per $f$ (*sugg.* disegnare l'insieme dei punti in cui $f(x, y) > 0$ e l'insieme dei punti in cui $f(x, y) < 0$).

**ESERCIZIO 5.** Sia $f(x, y) = (3 - x)(3 - y)(x + y - 3)$. Individuare e classificare i punti critici di $f$.

**ESERCIZIO 6.** Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x, y) = x\,y\,(1 - x^2 - y^2)$$

per ogni $(x, y)$ in $\mathbb{R}^2$.

(a) Determinare i punti di massimo e minimo relativi e i punti di sella.

(b) Determinare il massimo ed il minimo assoluti di $f$ nella regione di piano

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1\}.$$

**ESERCIZIO 7.** Sia $\mathcal{C}$ la curva del piano di equazione $5x^2+6xy+5y^2 = 8$. Sia $d$ la distanza dell'origine da un generico punto $P$ di $\mathcal{C}$. Trovare il valore massimo ed il valore minimo di $d$, e quindi calcolare la distanza di $\mathcal{C}$ dall'origine.

**ESERCIZIO 8.** Si consideri la funzione

$$f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{y + 2}.$$

1) Determinare il dominio $D$ di $f$ e mostrare che $f$ non ha nè massimo nè minimo assoluto su $D$.
2) Trovare il massimo ed il minimo assoluti di $f$ su

$$S = \{(x, y) \in D \mid x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

**ESERCIZIO 9.** Il passeggero di un aereo di linea può trasportare come bagaglio a mano un oggetto (a forma di scatola) per il quale la somma di larghezza, lunghezza e spessore non superi i 115 centimetri. Qual'è il massimo volume ammesso?

**ESERCIZIO 10.** Determinare il massimo ed il minimo assoluti di

$$f(x, y) = \frac{2}{1 + x^2 + y^2} - \frac{1}{2x^2 - 3}$$

su

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq 1,\ |y| \leq 1\}.$$

**ESERCIZIO 11.** Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x, y) = 2x^2 + x + y^2 - 2$$

per ogni $(x, y)$ in $\mathbb{R}^2$.

(a) Determinare i punti di massimo e minimo relativi e i punti di sella.
(b) Determinare il massimo ed il minimo assoluti di $f$ nella regione di piano

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4\}.$$

**ESERCIZIO 12.** Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x, y) = 3x^2 + 12x + 2y^2 - \frac{1}{4}\left(112 + 25\sqrt{2}\right) y - 400$$

per ogni $(x, y)$ in $\mathbb{R}^2$.

Determinare il massimo ed il minimo assoluti di $f$ nella regione di piano

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{(x + 2)^2}{9} + \frac{(y - 7)^2}{16} \leq 25\}.$$