## Istituzioni di Matematiche Modulo B (SG)

*III* foglio di esercizi

**ESERCIZIO 1.** Trovare i punti $(x, y)$ con $x^2 + y^2 = 1$ e le direzioni per cui la derivata direzionale di

$$f(x, y) = 3x^2 + y^2$$

ha il suo valore massimo.

**SOLUZIONE**.

Ricordo che se $\underline{v}$ è un fissato vettore non nullo e $\underline{u}$ è un versore, allora $\underline{v} \circ \underline{u}$ è massimo quando $\underline{u} = \frac{\underline{v}}{\|\underline{v}\|}$, ed il massimo vale $\|\underline{v}\|$. Abbiamo $f_x(x, y) = 6x$, $f_y(x, y) = 4y$, quindi $\nabla f(x, y) = (6x, 4y)$. Pertanto $D_{\underline{u}} f(x, y) = \nabla f(x, y) \circ \underline{u}$ è massimo per $\underline{u} = \frac{\nabla f(x,y)}{\|\nabla f(x,y)\|}$, ed il massimo vale $\|\nabla f(x, y)\| = \sqrt{36x^2 + 4y^2}$. Per concludere, si tratta di calcolare il massimo della funzione $g(x, y) = \sqrt{36x^2 + 4y^2}$ quando $x^2+y^2 = 1$. Qui possiamo direttamente sostituire al posto di $y^2$ il valore $1 - x^2$ ed osservare che il massimo di $36x^2 + 4y^2 = 36x^2 + 4(1 - x^2) = 32x^2 + 4$, per $0 \le x^2 \le 1$ vale 36. Il massimo richiesto è quindi 6, poichè la radice è crescente. $\square$

**ESERCIZIO 2.** Individuare e classificare i punti critici delle funzioni indicate:

1) $f(x, y) = x^2 + (y - 1)^2$,
2) $f(x, y) = x^2 - (y - 1)^2$,
3) $f(x, y) = (x - y + 1)^2$,
4) $f(x, y) = 2x^2 - xy - 3y^2 - 3x + 7y$,
5) $f(x, y) = x^2 - xy + y^2 - 2x + y$,
6) $f(x, y) = 2x^2 - xy - 3y^2$,
7) $f(x, y) = x^2 - xy + y^2$,
8) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$,
9) $f(x, y) = x\, y\, (5x + 2y - 30)$,
10) $f(x, y) = e^{2x+3y}(8x^2 - 6xy + 3y^2)$,

**SOLUZIONE**.

Ricordo che, per noi,

$$H(x, y) = \det \begin{pmatrix} f_{xx}(x, y) & f_{xy}(x, y) \\ f_{xy}(x, y) & f_{yy}(x, y) \end{pmatrix} = f_{xx}(x, y)f_{yy}(x, y) - (f_{xy}(x, y))^2$$

in forma compatta

$$H = \det \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix} = f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2$$

1)

$$f_x(x, y) = 2x \quad , \quad f_y(x, y) = 2(y - 1)$$

C'è un solo punto critico $P = (0, 1)$.

$$f_{xx}(x, y) = 2 \quad , \quad f_{yy}(x, y) = 2 \quad , \quad f_{xy}(x, y) = 0 \quad , \quad H(x, y) = 4$$

Quindi $H(P) = 4 > 0$ ed essendo $f_{xx}(P) = 2 > 0$, $P$ è un punto di minimo locale.

2)

$$f_x(x, y) = 2x \quad , \quad f_y(x, y) = -2(y - 1)$$

C'è un solo punto critico $P = (0, 1)$.

$$f_{xx}(x, y) = 2 \quad , \quad f_{yy}(x, y) = -2 \quad , \quad f_{xy}(x, y) = 0 \quad , \quad H(x, y) = -4$$

Quindi $H(P) = -4 < 0$, $P$ è un punto di sella.

3)

$$f_x(x, y) = 2(x - y + 1) \quad , \quad f_y(x, y) = -2(x - y + 1)$$

Il sistema

$$\begin{cases} f_x(x, y) = 0 \\ f_y(x, y) = 0 \end{cases}$$

si riduce a $x - y + 1 = 0$, quindi l'insieme dei punti critici è costituito da tutti i punti della retta $r : x - y + 1 = 0$.

$$f_{xx}(x, y) = 2 \quad , \quad f_{yy}(x, y) = 2 \quad , \quad f_{xy}(x, y) = -2 \quad , \quad H(x, y) = 0$$

L'Hessiano risulta la funzione costante nulla, quindi in particolare $H(P) = 0$ per ogni punto $P$ di $r$, e il criterio non ci dà informazioni. Osserviamo tuttavia che $f(x, y) = (x - y + 1)^2 \geq 0$ per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, e che $f(x, y) = 0$ proprio quando $(x, y) \in r$. Quindi tutti i punti critici sono addirittura di minimo assoluto ed, in particolare, di minimo locale.

4)

$$f_x(x, y) = 4x - y - 3 \quad , \quad f_y(x, y) = -x - 6y + 7$$

Il sistema

$$\begin{cases} f_x(x, y) = 0 \\ f_y(x, y) = 0 \end{cases}$$

risulta

$$\begin{cases} 4x - \ \ y - 3 &= 0 \\ -x - 6y + 7 &= 0 \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} 4x - y &= 3 \\ x + 6y &= 7 \end{cases}$$

Poichè $\det \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} = 24 + 1 = 25 \neq 0$, il sistema ha un'unica soluzione

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 1 & 6 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 6 & 7 \\ 4 & -1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 6 & 7 \\ 0 & -25 & -25 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 6 & 7 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

La seconda equazione è $y = 1$. La prima è $x+6y = 7$, quindi $x = 1$: c'è un solo punto critico $P = (1, 1)$.

$$f_{xx}(x, y) = 4 \quad , \quad f_{yy}(x, y) = -6 \quad , \quad f_{xy}(x, y) = -1 \quad , \quad H(x, y) = -25$$

Quindi $H(P) = -25 < 0$, $P$ è un punto di sella.

5)

$$f_x(x, y) = 2x - y - 2 \quad , \quad f_y(x, y) = -x + 2y + 1$$

Il sistema

$$\begin{cases} f_x(x, y) = 0 \\ f_y(x, y) = 0 \end{cases}$$

risulta

$$\begin{cases} 2x - y - 2 & = 0 \\ -x + 2y + 1 & = 0 \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} 2x - y & = 2 \\ x - 2y & = 1 \end{cases}$$

Poichè $\det \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = -4 + 1 = -3 \neq 0$, il sistema ha un'unica soluzione.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

La seconda equazione è $3y = 0$, $y = 0$. La prima è $x - 2y = 1$, quindi $x = 1$: c'è un solo punto critico $P = (1, 0)$.

$$f_{xx}(x, y) = 2 \quad , \quad f_{yy}(x, y) = 2 \quad , \quad f_{xy}(x, y) = -1 \quad , \quad H(x, y) = 3$$

Quindi $H(P) = 3 > 0$, ed essendo $f_{xx}(P) = 2 > 0$, $P$ è un punto di minimo locale.

6)

$$f_x(x, y) = 4x - y \quad , \quad f_y(x, y) = -x - 6y$$

Il sistema

$$\begin{cases} f_x(x, y) = 0 \\ f_y(x, y) = 0 \end{cases}$$

risulta

$$\begin{cases} 4x - y & = 0 \\ x + 6y & = 0 \end{cases}$$

Poichè $\det \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} = 24+1 = 25 \neq 0$, il sistema ha un'unica soluzione, che necessariamente è $P = (0, 0)$, in quanto il sistema è omogeneo.

$$f_{xx}(x, y) = 4 \quad , \quad f_{yy}(x, y) = -6 \quad , \quad f_{xy}(x, y) = -1 \quad , \quad H(x, y) = -25$$

Quindi $H(P) = -25 < 0$, $P$ è un punto di sella.

7)

$$f_x(x, y) = 2x - y \quad , \quad f_y(x, y) = -x + 2y$$

Il sistema

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 0 \\ f_y(x,y) = 0 \end{cases}$$

risulta

$$\begin{cases} 2x - y & = 0 \\ -x + 2y & = 0 \end{cases}$$

Poichè $\det \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = 4 - 1 = 3 \neq 0$, il sistema ha un'unica soluzione, che necessariamente è $P = (0,0)$, in quanto il sistema è omogeneo.

$$f_{xx}(x,y) = 2 \quad , \quad f_{yy}(x,y) = 2 \quad , \quad f_{xy}(x,y) = -1 \quad , \quad H(x,y) = 3$$

Quindi $H(P) = 3 > 0$ ed essendo $f_{xx}(P) = 2 > 0$, $P$ è un punto di minimo locale.

8)

$$f_x(x,y) = 3x^2 - 3y \quad , \quad f_y(x,y) = 3y^2 - 3x$$

Il sistema

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 0 \\ f_y(x,y) = 0 \end{cases}$$

risulta

$$\begin{cases} 3x^2 - 3y & = 0 \\ 3y^2 - 3x & = 0 \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} y & = x^2 \\ x & = y^2 \end{cases}$$

Sostituendo $y$ nella seconda equazione otteniamo $x = x^4$, e quindi $x(x^3 - 1) = 0$ che ha soluzioni $x = 0$, 1. Ci sono quindi due punti critici: $A = (0,0)$, $B = (1,1)$.

$$f_{xx}(x,y) = 6x \quad , \quad f_{yy}(x,y) = 6y \quad , \quad f_{xy}(x,y) = -3 \quad , \quad H(x,y) = 36xy - 9$$

Quindi $H(A) = -9 < 0$, $A$ è un punto di sella.

$H(B) = 27 > 0$ ed essendo $f_{xx}(B) = 6 > 0$, $B$ è un punto di minimo locale.

9)

$$f = x\,y\,(5x + 2y - 30)$$

$$f_x(x,y) = y(5x+2y-30)+5xy = 2y\;(5x+y-15) \quad , \quad f_y(x,y) = x(5x+2y-30)+2xy = x\;(5x+4y-30)$$

Il sistema

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 0 \\ f_y(x,y) = 0 \end{cases}$$

risulta

$$\begin{cases} 2y\;(5x + y - 15) & = 0 \\ x\;(5x + 4y - 30) & = 0 \end{cases}$$

Dalla prima equazione segue che $y = 0$, oppure $5x + y - 15 = 0$. Dalla seconda equazione segue che $x = 0$, oppure $5x + 4y - 30 = 0$.

Vogliamo trovare *tutti* i punti critici.

Se $y = 0$, allora la prima equazione è soddisfatta e la seconda diventa

$$x\ (5x - 30) = 0$$

ossia $x = 0, 6$. Otteniamo quindi $P_1 = (0, 0)$, $P_2 = (6, 0)$.

Se $x = 0$, allora la seconda equazione è soddisfatta e la prima diventa

$$2y\ (y - 15) = 0$$

ossia $y = 0, 15$. Otteniamo quindi $P_1 = (0, 0)$ (che avevamo già trovato), $P_3 = (0, 15)$. Rimane il caso in cui $x \neq 0$ ed $y \neq 0$. Il sistema diventa

$$\begin{cases} 5x + y - 15 & = 0 \\ 5x + 4y - 30 & = 0 \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} 5x + y & = 15 \\ 5x + 4y & = 30 \end{cases}$$

un sistema lineare.

Poichè $\det \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} = 20 - 5 = 15 \neq 0$, il sistema ha un'unica soluzione.

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 15 \\ 5 & 4 & 30 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 5 & 1 & 15 \\ 0 & 3 & 15 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 5 & 1 & 15 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

La seconda equazione è $y = 5$. La prima è $5x + y = 15$, quindi $x = 2$: e trovo $P_4 = (2, 5)$.

In tutto ci sono 4 punti critici:

$$P_1 = (0, 0),\ P_2 = (6, 0),\ P_3 = (0, 15),\ P_4 = (2, 5)$$

Si ha

$$f_{xx}(x, y) = 10y \quad , \quad f_{yy}(x, y) = 4x \quad , \quad f_{xy}(x, y) = 10x + 4y - 30 \quad ,$$

Per $P_1 = (0, 0)$, $f_{xx}(P_1) = 0$, $f_{yy}(P_1) = 0$, $f_{xy}(P_1) = -30$, $H(P_1) = 0 \cdot 0 - (-30)^2 = -900 < 0$, $P_1$ è un punto di sella.

Per $P_2 = (6, 0)$, $f_{xx}(P_2) = 0$, $f_{yy}(P_2) = 24$, $f_{xy}(P_2) = 60+0-30 = 30$, $H(P_2) = 0 \cdot 24 - 30^2 = -900 < 0$, $P_2$ è un punto di sella.

Per $P_3 = (0, 15)$, $f_{xx}(P_3) = 150$, $f_{yy}(P_3) = 0$, $f_{xy}(P_3) = 0 + 60 - 30 = 30$, $H(P_3) = 150 \cdot 0 - 30^2 = -900 < 0$, $P_3$ è un punto di sella.

Infine per $P_4 = (2, 5)$, $f_{xx}(P_4) = 50$, $f_{yy}(P_4) = 8$, $f_{xy}(P_4) = 20 + 20 - 30 = 10$, $H(P_4) = 50 \cdot 8 - 10^2 = 400 - 100 = 300 > 0$, ed essendo $f_{xx}(P_4) = 50 > 0$, $P_4$ è un punto di minimo locale.

10) $f(x, y) = e^{2x+3y}(8x^2 - 6xy + 3y^2)$

$$f_x(x, y) = 2e^{2x+3y}(8x^2 + 8x - 3y - 6xy + 3y^2) \quad , \quad f_y(x, y) = 3e^{2x+3y}(8x^2 - 2x + 2y - 6xy + 3y^2)$$

Il sistema

$$\begin{cases} f_x(x, y) = 0 \\ f_y(x, y) = 0 \end{cases}$$

risulta

$$\begin{cases} e^{2x+3y}(8x^2+8x-3y-6xy+3y^2) & =0 \\ e^{2x+3y}(8x^2-2x+2y-6xy+3y^2) & =0 \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} 8x^2+8x-3y-6xy+3y^2 & =0 \\ 8x^2-2x+2y-6xy+3y^2 & =0 \end{cases}$$

in quanto $e^{2x+3y}$ non si annulla mai. Sottraendo la seconda equazione dalla prima otteniamo $10x-5y=0$, e quindi $y=2x$. Sostituendo $y=2x$ nella prima equazione e raccogliendo, otteniamo $2x(1+4x)=0$, che ha soluzioni $x=0$, $-1/4$. Ci sono quindi due punti critici: $A=(0,0)$, $B=(-1/4,-1/2)$.

$$f_{xx}(x,y)=e^{2x+3y}(16+64\,x+32\,x^2-24\,y-24\,x\,y+12\,y^2)$$

$$f_{yy}(x,y)=e^{2x+3y}(6-36\,x+72\,x^2+36\,y-54\,x\,y+27\,y^2)$$

$$f_{xy}(x,y)=e^{2x+3y}(-6+36\,x+48\,x^2-6\,y-36\,x\,y+18\,y^2)$$

Non conviene calcolare $H(x,y)$ esplicitamente per ogni $x$, $y\in\mathbb{R}$, ma valutare le derivate parziali del secondo ordine in $A$ ed in $B$, e poi calcolare $H(A)$ ed $H(B)$.

Si ha $f_{xx}(A)=16$, $f_{yy}(A)=6$, $f_{xy}(A)=-6$, $H(A)=60>0$ ed essendo $f_{xx}(A)=16>0$, $A$ è un punto di minimo locale.

Infine $f_{xx}(B)=14e^{-2}$, $f_{yy}(B)=\frac{3}{2}e^{-2}$, $f_{xy}(B)=-9e^{-2}$, $H(B)=-60e^{-4}<0$, $B$ è un punto di sella. $\square$

**ESERCIZIO 3.** Sia $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y)=x\ y\ e^{-(x^2+y^2)}$$

per ogni $(x,y)$ in $\mathbb{R}^2$. Determinare i punti di massimo e minimo relativi e i punti di sella.

**SOLUZIONE**.

La funzione $f$ è definita su tutto $\mathbb{R}^2$ e non ha punti singolari. Calcoliamo i punti critici.

$$f_x=y\ e^{-(x^2+y^2)}(1-2x^2) \quad , \quad f_y=x\ e^{-(x^2+y^2)}(1-2y^2)$$

Il sistema

$$\begin{cases} f_x(x,y)=0 \\ f_y(x,y)=0 \end{cases}$$

risulta

$$\begin{cases} y\ e^{-(x^2+y^2)}(1-2x^2) & =0 \\ x\ e^{-(x^2+y^2)}(1-2y^2) & =0 \end{cases}$$

ma $e^{-(x^2+y^2)}>0$ per ogni $x$, $y\in R$, quindi otteniamo

$$\begin{cases} y\ (1-2x^2) & =0 \\ x\ (1-2y^2) & =0 \end{cases}$$

Dalla prima equazione segue che $y = 0$, oppure $1 - 2x^2 = 0$. Dalla seconda equazione segue che $x = 0$, oppure $1 - 2y^2 = 0$.

Se $y \neq 0$ allora dalla prima equazione segue $1 - 2x^2 = 0$, $x^2 = \frac{1}{2}$, $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. In particolare $x \neq 0$ e quindi dalla seconda equazione segue $1 - 2y^2 = 0$, $y^2 = \frac{1}{2}$, $y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. Troviamo:

$$P_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) , P_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) , P_3 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) , P_4 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Se $y = 0$, allora la prima equazione è soddisfatta e la seconda diventa

$$x = 0$$

ossia $x = 0$. Otteniamo quindi $P_5 = (0, 0)$.

In tutto ci sono 5 punti critici:

$$P_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) , P_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) , P_3 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) , P_4 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) , P_5 = (0, 0)$$

Si ha

$$f_{xx}(x, y) = 2\ x\ y\left(2x^2 - 3\right) e^{-(x^2+y^2)} \quad , \quad f_{yy}(x, y) = 2\ x\ y\left(2y^2 - 3\right) e^{-(x^2+y^2)} \quad ,$$

$$f_{xy}(x, y) = \left(2x^2 - 1\right)\left(2y^2 - 1\right) e^{-(x^2+y^2)}$$

Non conviene calcolare $H(x, y)$ esplicitamente per ogni $x$, $y \in \mathbb{R}$, ma valutare le derivate parziali del secondo ordine nei vari punti critici $P_i$, e poi calcolare $H(P_i)$.

Partiamo da $P_5 = (0, 0)$. Si ha $f_{xx}(P_5) = f_{yy}(P_5) = 0$, $f_{xy}(P_5) = e^{-0} = 1$. Quindi $H(P_5) = 0 \cdot 0 - 1 = -1 < 0$ e $P_5$ è un punto di sella.

Consideriamo adesso $P_1$, $P_2$, $P_3$, $P_4$. Si ha sempre $x^2 = y^2 = \frac{1}{2}$. Ne segue che $f_{xy}(P_i) = 0$ per ogni $i = 1, 2, 3, 4$. Vediamo adesso come risulta $f_{xx}(P_i)f_{yy}(P_i)$. Si ha

$$f_{xx}(x, y)f_{yy}(x, y) = 4\ x^2\ y^2\left(2x^2 - 3\right)\left(2y^2 - 3\right) e^{-2(x^2+y^2)}$$

quindi

$$f_{xx}(P_i)f_{yy}(P_i) = 4\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\left(2\frac{1}{2} - 3\right)\left(2\frac{1}{2} - 3\right) e^{-2(\frac{1}{2}+\frac{1}{2})} = 4\ e^{-2} > 0$$

per ogni $i = 1, 2, 3, 4$. Pertanto $H(P_i) > 0$, e $P_i$ è punto di estremo locale per ogni $i = 1, 2, 3, 4$. Calcolo $f_{xx}(P_i)$. Essendo $f_{xx}(x, y) = 2\ x\ y\left(2x^2 - 3\right) e^{-(x^2+y^2)}$, si ha

$$f_{xx}(P_1) = f_{xx}(P_4) = 2\ \frac{1}{2}\left(2\frac{1}{2} - 3\right) e^{-(\frac{1}{2}+\frac{1}{2})} = -2\ e^{-1} < 0$$

e $P_1$ e $P_4$ sono punti di massimo locale,

$$f_{xx}(P_2) = f_{xx}(P_3) = -2\ \frac{1}{2}\left(2\frac{1}{2} - 3\right) e^{-(\frac{1}{2}+\frac{1}{2})} = 2\ e^{-1} > 0$$

e $P_1$ e $P_4$ sono punti di minimo locale. $\square$

**ESERCIZIO 4.** Sia $f(x, y) = 3x^4 - 4x^2y + y^2$. Dimostrare che su ogni retta $y = mx$ la restrizione di $f$ ha minimo locale in $P = (0, 0)$. Dimostrare che tuttavia $P$ non è di minimo locale per $f$ (*sugg.* disegnare l'insieme dei punti in cui $f(x, y) > 0$ e l'insieme dei punti in cui $f(x, y) < 0$).

**SOLUZIONE**.

La retta $y = mx$ è costituita dai punti $P_t = (t, mt)$ al variare di $t \in \mathbb{R}$. Consideriamo allora $g(t) = f(P_t) = f(t, mt) = m^2t^2 - 4mt^3 + 3t^4$. Si tratta di dimostrare che $g(t)$ ha minimo locale per $t = 0$. Se $m = 0$, allora $g(t) = 3t^4$ che addirittura ha minimo assoluto in $t = 0$. Sia ora $m \neq 0$. Abbiamo $g'(t) = 2m^2t - 12mt^2 + 12t^3$ e quindi $g'(0) = 0$. Ora $g''(t) = 2m^2 - 24t + 36t^2$, quindi $g''(0) = 2m^2 > 0$, in quanto stiamo assumendo $m \neq 0$. Per il criterio della derivata seconda, $t = 0$ è di minimo locale (abbiamo quindi dimostrato che per ogni retta $y = mx$ la restrizione di $f$ ha minimo locale in $(0, 0)$. Possiamo anche considerare la restrizione di $f$ alla retta $x = 0$, che è l'unica retta del fascio per $(0, 0)$ non del tipo $y = mx$. Ponendo $g(t) = f(0, t) = t^2$, otteniamo che anche questa restrizione ha minimo locale per $t = 0$).

Il suggerimento ci propone di studiare la disequazione $3x^4 - 4x^2y + y^2 > 0$, che risolviamo in $y$. L'equazione $y^2 - 4x^2y + 3x^4 = 0$ ha soluzioni

$$y = 2x^2 \pm \sqrt{4x^4 - 3x^4} = 2x^2 \pm x^2$$

quindi $y = 3x^2$, $y = x^2$. Pertanto $y^2 - 4x^2y + 3x^4 > 0$ per $y < x^2$ oppure $y > 3x^2$. Nella parte di piano compresa tra le parabole di equazioni $y = x^2$ ed $y = 3x^2$ invece si ha $y^2 - 4x^2y + 3x^4 < 0$. Se noi fissiamo un qualunque intorno $B_\delta(0, 0)$ di $(0, 0)$, in questo intorno ci sono sia punti compresi tra le due parabole, sia punti sopra la parabola $y = 3x^2$ oppure sotto $y = x^2$. Quindi ci sono sia punti in cui $f(x, y) < 0$, sia punti in cui $f(x, y) > 0$. Quindi $P = (0, 0)$ (che è un punto critico), è un punto di sella. $\square$

**ESERCIZIO 5.** Sia $f(x, y) = (3 - x)(3 - y)(x + y - 3)$. Individuare e classificare i punti critici di $f$.

**SOLUZIONE**.

$$f_x(x, y) = (y - 3)(2x + y - 6) \quad , \quad f_y(x, y) = (x - 3)(x + 2y - 6)$$

Il sistema

$$\begin{cases} f_x(x, y) = 0 \\ f_y(x, y) = 0 \end{cases}$$

risulta

$$\begin{cases} (y-3)(2x+y-6) &= 0 \\ (x-3)(x+2y-6) &= 0 \end{cases}$$

Se $y \neq 3$, dalla prima equazione otteniamo $y = -2x+6$, che sostituiamo nella seconda: $(x-3)(-3x+6) = 0$, quindi $x = 3,\ 2$. Otteniamo quindi $P_1 = (3,0)$, $P_2 = (2,2)$. Se $y = 3$, allora la prima equazione è sempre soddisfatta. La seconda diventa $(x-3)x = 0$ e quindi $x = 3,\ 0$. Otteniamo quindi $P_3 = (3,3)$, $P_4 = (0,3)$. Ci sono quindi 4 punti critici.

$$f_{xx}(x,y) = 2y-6 \quad , \quad f_{yy}(x,y) = 2x-6 \quad , \quad f_{xy}(x,y) = 2x+2y-9 \quad ,$$

Per $P_1 = (3,0)$, $f_{xx}(P_1) = -6$, $f_{yy}(P_1) = 0$, $f_{xy}(P_1) = -3$, $H(P_1) = -9 < 0$, $P_1$ è un punto di sella.
Per $P_2 = (2,2)$, $f_{xx}(P_2) = -2$, $f_{yy}(P_2) = -2$, $f_{xy}(P_2) = -1$, $H(P_2) = 3 > 0$ ed essendo $f_{xx}(P_2) = -2 < 0$, $P_2$ è un punto di massimo locale.
Per $P_3 = (3,3)$, $f_{xx}(P_3) = 0$, $f_{yy}(P_3) = 0$, $f_{xy}(P_3) = 3$, $H(P_3) = -9 < 0$, $P_3$ è un punto di sella.
Infine per $P_4 = (0,3)$, $f_{xx}(P_4) = 0$, $f_{yy}(P_4) = -6$, $f_{xy}(P_4) = -3$, $H(P_4) = -9 < 0$, $P_4$ è un punto di sella. $\square$

**ESERCIZIO 6.** Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = x\,y\,(1-x^2-y^2)$$

per ogni $(x,y)$ in $\mathbb{R}^2$.

(a) Determinare i punti di massimo e minimo relativi e i punti di sella.

(b) Determinare il massimo ed il minimo assoluti di $f$ nella regione di piano

$$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1\}.$$

**SOLUZIONE**.

(a) Calcoliamo i punti critici.

$$f_x = y(1-x^2-y^2) - 2x^2y = -y(3x^2+y^2-1) \quad , \quad f_y = x(1-x^2-y^2) - 2xy^2 = -x(x^2+3y^2-1)$$

Il sistema

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 0 \\ f_y(x,y) = 0 \end{cases}$$

risulta

$$\begin{cases} y(3x^2+y^2-1) &= 0 \\ x(x^2+3y^2-1) &= 0 \end{cases}$$

Se $y \neq 0$, dalla prima equazione otteniamo $y^2 = 1-3x^2$, che sostituiamo nella seconda: $x(-8x^2+2) = 0$, quindi $x(x^2 - \frac{1}{4}) = 0$ $x = 0,\ 1/2,\ -1/2$. Essendo $y^2 = 1 - 3x^2$, per $x = 0$ otteniamo $y = 1,\ -1$, e quindi $P_1 = (0,1)$, $P_2 = (0,-1)$; per $x = \pm 1/2$ abbiamo $x^2 = 1/4$ quindi $y^2 = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$, e otteniamo $P_3 = (1/2, 1/2)$, $P_4 = (1/2, -1/2)$, $P_5 = (-1/2, 1/2)$, $P_6 = (-1/2, -1/2)$.

Se $y = 0$, allora la prima equazione è sempre soddisfatta. La seconda diventa $x(x^2 - 1) = 0$ e quindi $x = 0,\ 1,\ -1$. Otteniamo quindi $P_7 = (0,0)$, $P_8 = (1,0)$, $P_9 = (-1,0)$. Ci sono quindi 9 punti critici.

$$f_{xx}(x,y) = -6xy \quad , \quad f_{yy}(x,y) = -6xy \quad , \quad f_{xy}(x,y) = 1 - 3x^2 - 3y^2 \quad ,$$

Per $P_1 = (0,1)$, $f_{xx}(P_1) = 0$, $f_{yy}(P_1) = 0$, $f_{xy}(P_1) = -2$, $H(P_1) = -4 < 0$, $P_1$ è un punto di sella.

Per $P_2 = (0,-1)$, $f_{xx}(P_2) = 0$, $f_{yy}(P_2) = 0$, $f_{xy}(P_2) = -2$, $H(P_2) = -4 < 0$, $P_2$ è un punto di sella.

Per $P_3 = (1/2, 1/2)$, $f_{xx}(P_3) = -3/2$, $f_{yy}(P_3) = -3/2$, $f_{xy}(P_3) = -1/2$, $H(P_3) = 2 > 0$ ed essendo $f_{xx}(P_3) = -3/2 < 0$ $P_3$ è un punto di massimo locale.

Per $P_4 = (1/2, -1/2)$, $f_{xx}(P_4) = 3/2$, $f_{yy}(P_4) = 3/2$, $f_{xy}(P_4) = -1/2$, $H(P_4) = 2 > 0$ ed essendo $f_{xx}(P_4) = 3/2 > 0$ $P_4$ è un punto di minimo locale.

Per $P_5 = (-1/2, 1/2)$, $f_{xx}(P_5) = 3/2$, $f_{yy}(P_5) = 3/2$, $f_{xy}(P_5) = -1/2$, $H(P_5) = 2 > 0$ ed essendo $f_{xx}(P_5) = 3/2 > 0$ $P_5$ è un punto di minimo locale.

Per $P_6 = (-1/2, -1/2)$, $f_{xx}(P_6) = -3/2$, $f_{yy}(P_6) = -3/2$, $f_{xy}(P_6) = -1/2$, $H(P_6) = 2 >$ ed essendo $f_{xx}(P_6) = -3/2 < 0$ $P_6$ è un punto di massimo locale.

Per $P_7 = (0,0)$, $f_{xx}(P_7) = 0$, $f_{yy}(P_7) = 0$, $f_{xy}(P_7) = 1$, $H(P_7) = -1 < 0$, $P_7$ è un punto di sella.

Per $P_8 = (1,0)$, $f_{xx}(P_8) = 0$, $f_{yy}(P_8) = 0$, $f_{xy}(P_8) = -2$, $H(P_8) = -4 < 0$, $P_8$ è un punto di sella.

Infine per $P_9 = (-1,0)$, $f_{xx}(P_9) = 0$, $f_{yy}(P_9) = 0$, $f_{xy}(P_9) = -2$, $H(P_9) = -4 < 0$, $P_9$ è un punto di sella.

Abbiamo concluso lo studio dei punti critici su tutto $\mathbb{R}^2$.

(b) Calcoliamo adesso il massimo ed il minimo assoluti di $f$ su $S$ che è il quadrato di vertici $A = (0,0)$, $B = (1,0)$, $C = (0,1)$, $D = (1,1)$ (il massimo ed il minimo assoluti esistono poichè $f$ è continua ed $S$ è chiuso e limitato). Non ci sono punti singolari. C'è un solo punto critico interno: $P_3$. Determiniamo adesso i punti della frontiera che potrebbero essere di minimo o massimo assoluto.

Sul segmento di estremi $A$ e $B$ e sul segmento di estremi $A$ e $C$, la funzione è nulla. Consideriamo adesso il segmento di estremi $B$ e $D$. Poniamo $P_t = (1,t)$, $0 \leq t \leq 1$, e $g(t) = f(P_t) = f(1,t) = -t^3$. Essendo $g'(t) = -3t^2$, si ha $g'(t) = 0$ se e solo se $t = 0$, quindi basta considerare gli estremi $B$ e $D$.

Consideriamo adesso il segmento di estremi $C$ e $D$. Poniamo $Q_t = (t,1)$, $0 \leq t \leq 1$, e $h(t) = f(Q_t) = f(t,1) = -t^3$. Essendo $h'(t) = -3t^2$, si ha $g'(t) = 0$ se e solo se $t = 0$, quindi basta considerare gli estremi $B$ e $D$.

Concludendo i punti dove il massimo ed il minimo sono assunti sono nell'insieme

$$X = \{P_3, A, B, C, D\}$$

Ora $f(P_3) = 1/8$, $f(A) = f(B) = f(C) = 0$, $f(D) = -1$ quindi il massimo assoluto è $1/8$ (assunto in $P_3$) ed il minimo assoluto è $-1$ (assunto in $D$).

**Osservazione**. Se dobbiamo solo calcolare il massimo ed il minimo assoluti di $f$ su $S$, non è necessario classificare i punti critici, ma solo determinare i punti critici e considerare quelli interni (oltre ovviamente ai punti singolari interni e allo studio della frontiera). $\square$

**ESERCIZIO 7.** Sia $\mathcal{C}$ la curva del piano di equazione $5x^2+6xy+5y^2 = 8$. Sia $d$ la distanza dell'origine da un generico punto $P$ di $\mathcal{C}$. Trovare il valore massimo ed il valore minimo di $d$, e quindi calcolare la distanza di $\mathcal{C}$ dall'origine.

**SOLUZIONE**.

Osservo innanzitutto che $\mathcal{C}$ è un'ellisse (il discriminante è $36 - 100 < 0$), quindi la funzione distanza di un punto di $\mathcal{C}$ da un qualunque punto fissato ha sempre massimo e minimo assoluti poichè $\mathcal{C}$ è chiusa e limitata.

Ricordo che se $X$ è un punto sulla curva per cui la distanza di $X = (x, y)$ dall'origine $O = (0, 0)$ è minima o massima, allora il vettore $X - O = (x, y)$ è ortogonale alla curva in $X$. Poniamo

$$f(x, y) = 5x^2 + 6xy + 5y^2,$$

quindi $\mathcal{C}$ è una curva di livello (esattamente la curva di livello $\mathcal{C} : 5x^2 + 6xy + 5y^2 = 8$). Si ha $f_x(x, y) = 10x + 6y$, $f_y(x, y) = 6x + 10y$, quindi il vettore $\nabla f(X) = (10x + 6y, 6x + 10y)$ è un vettore ortogonale a $\mathcal{C}$ in $X$. La condizione di parallelismo tra $\nabla f(X)$ e $X - O$ si può tradurre in

$$\det \begin{pmatrix} 10x + 6y & x \\ 6x + 10y & y \end{pmatrix} = 0$$

cioè $6y^2 - 6x^2 = 0$ e quindi $y = \pm x$ (osservo che $\nabla f(X) = (0, 0)$ se e solo se $X = (0, 0)$, ma $(0, 0)$ non sta in $\mathcal{C}$).

Se $y = x$, dall'equazione di $\mathcal{C}$ otteniamo $5x^2+6x^2+5x^2 = 8$, quindi $x^2 = 1/2$, $x = \pm 1/\sqrt{2}$ e troviamo due punti $P_1 = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$, $P_2 = (-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$.

Se $y = -x$, dall'equazione di $\mathcal{C}$ otteniamo $5x^2 - 6x^2 + 5x^2 = 8$, quindi $x^2 = 2$, $x = \pm\sqrt{2}$ e troviamo due punti $P_3 = (\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, $P_4 = (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

La distanza al quadrato di questi punti da $O$ è

$$d^2(P_1, O) = d^2(P_2, O) = 1/2 + 1/2 = 1 \quad , \quad d^2(P_3, O) = d^2(P_4, O) = 2 + 2 = 4$$

Possiamo concludere dicendo che la distanza massima vale 2 e la minima vale 1. Poiché per definizione la distanza tra $\mathcal{C}$ ed $O$ è il minimo tra le $d(X, O)$ con $X \in \mathcal{C}$, concludiamo che $d(\mathcal{C}, O) = 1$ $\square$

**ESERCIZIO 8.** Si consideri la funzione

$$f(x,y) = \frac{x^2+y^2}{y+2}.$$

1) Determinare il dominio $D$ di $f$ e mostrare che $f$ non ha nè massimo nè minimo assoluto su $D$.

2) Trovare il massimo ed il minimo assoluti di $f$ su

$$S = \{(x,y) \in D \mid x^2+y^2 \le 1\}.$$

**SOLUZIONE**.

1) $f$ è definita per $y \neq -2$: $D = \{(x,y) \mid y \neq -2\}$. Poniamo $g(t) = f(0,t) = \frac{t^2}{t+2}$ per $t \neq -2$. Ora

$$\lim_{t\to -2^+} \frac{t^2}{t+2} = +\infty \quad , \quad \lim_{t\to -2^-} \frac{t^2}{t+2} = -\infty$$

quindi $g$, ed $f$ non hanno nè massimo nè minimo assoluti.

2) Si ha

$$f_x(x,y) = \frac{2x}{y+2} \quad , \quad f_y(x,y) = \frac{-x^2+4y+y^2}{(y+2)^2}$$

Quindi non ci sono punti singolari. Il sistema

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 0 \\ f_y(x,y) = 0 \end{cases}$$

risulta

$$\begin{cases} \frac{2x}{y+2} & = 0 \\ \frac{-x^2+4y+y^2}{(y+2)^2} & = 0 \end{cases} \quad , \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} 2x & = 0 \\ -x^2+4y+y^2 & = 0 \end{cases}$$

Dalla prima equazione otteniamo $x = 0$. La seconda equazione diventa $4y + y^2 = 0$, quindi $y = 0, -4$. Ci sono due punti critici $P_1 = (0,0)$, $P_2 = (0,-4)$. Solo $P_1$ è interno ad $S$.

La frontiera di $S$ è la circonferenza di centro $(0,0)$ e raggio 1: $\{(x,y) \mid x^2+y^2 = 1\}$. Parametrizzo i punti della circonferenza al solito modo: $P_t = (\cos t, \sin t)$, $0 \le t \le 2\pi$. Poniamo $g(t) = f(P_t) = \frac{1}{\sin t+2}$. Si ha $g'(t) = -\frac{\cos t}{(\sin t+2)^2}$ e quindi $g'(t) = 0$ per $t = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$. Dobbiamo quindi considerare i punti $A = (1,0)$, $B = (0,1)$, $C = (0,-1)$.

Concludendo i punti dove il massimo ed il minimo sono assunti sono nell'insieme

$$X = \{P_1, A, B, C\}$$

Ora $f(P_1) = 0$, $f(A) = 1/2$, $f(B) = 1/3$, $f(C) = 1$, quindi il massimo assoluto è 1 ed il minimo assoluto è 0. $\square$

**ESERCIZIO 9.** Il passeggero di un aereo di linea può trasportare come bagaglio a mano un oggetto (a forma di scatola) per il quale la somma di larghezza, lunghezza e spessore non superi i 115 centimetri. Qual'è il massimo volume ammesso?

**SOLUZIONE**.

Indichiamo con $x$, $y$, $z$ le dimensioni della scatola. Avremo allora $x+y+z=115$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$. Poniamo $E = \{(x,y,z) \mid x+y+z=115, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$, $f : E \to \mathbb{R}$, $(x,y,z) \mapsto xyz$. La funzione $f$ ha massimo assoluto poiché $f$ è continua ed $E$ è chiuso e limitato (ad esempio si ha sicuramente $x \leq 115$, $y \leq 115$, $z \leq 115$).

Da $x+y+z=115$ segue $z = 115-x-y$ e quindi possiamo tradurre il problema nel seguente modo. Poniamo $D = \{(x,y) \mid x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 115\}$, $g : D \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto xy(115-x-y)$. Il massimo di $f$ coincide con il massimo di $g$ (osservo che $g$ ha massimo (e anche minimo) assoluto su $D$ in quanto $g$ è continua, e $D$ è chiuso e limitato. Questo fornisce una argomentazione alternativa per affermare che $f$ ha massimo assoluto su $E$).

Si ha

$$g_x(x,y) = -y(2x+y-115) \quad , \quad g_y(x,y) = -x(x+2y-115)$$

Quindi non ci sono punti singolari. Il sistema

$$\begin{cases} g_x(x,y) = 0 \\ g_y(x,y) = 0 \end{cases}$$

risulta

$$\begin{cases} -y(2x+y-115) &= 0 \\ -x(x+2y-115) &= 0 \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} y(2x+y-115) &= 0 \\ x(x+2y-115) &= 0 \end{cases}$$

Le due equazioni sono già fattorizzate, la situazione più comoda per noi.

Dalla prima equazione segue che $y = 0$, oppure $2x+y-115 = 0$. Dalla seconda equazione segue che $x = 0$, oppure $x+2y-115 = 0$.

Se $y = 0$, allora la prima equazione è soddisfatta e la seconda diventa

$$x(x-115) = 0$$

ossia $x = 0, 115$. Otteniamo quindi $P_1 = (0,0)$, $P_2 = (115,0)$.

Se $x = 0$, allora la seconda equazione è soddisfatta e la prima diventa

$$y(y-115) = 0$$

ossia $y = 0, 115$. Otteniamo quindi $P_1 = (0,0)$ (che avevamo già trovato), $P_3 = (0,115)$. Rimane il caso in cui $x \neq 0$ ed $y \neq 0$. Il sistema diventa

$$\begin{cases} 2x+y-115 &= 0 \\ x+2y-115 &= 0 \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} 2x+y &= 115 \\ x+2y &= 115 \end{cases}$$

un sistema lineare.

Poichè $\det \left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right) = 4 - 1 = 3 \neq 0$, il sistema ha un'unica soluzione.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 115 \\ 1 & 2 & 115 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 115 \\ 2 & 1 & 115 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 115 \\ 0 & -3 & -115 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 115 \\ 0 & 3 & 115 \end{pmatrix}$$

La seconda equazione è $3y = 115$, $y = 115/3$. La prima è $x + 2y = 115$, quindi $x = 115/3$: e trovo $P_4 = (115/3, 115/3)$.

In tutto ci sono 4 punti critici:

$$P_1 = (0,0),\ P_2 = (115,0),\ P_3 = (0,115),\ P_4 = (115/3, 115/3)$$

ma solo $P_4$ è interno.

La frontiera è costituita dai tre lati del triangolo di vertici $A = (0,0)$, $B = (115,0)$, $C = (0,115)$. La restrizione di $g$ sui due cateti è nulla. Poniamo $P_t = (t, 115 - t)$, $0 \leq t \leq 115$. Calcolando $f(P_t)$, troviamo $f(P_t) = 0$, quindi anche la restrizione sull'ipotenusa è nulla. Si tratta quindi di considerare l'insieme $X = \{P_4, A, B, C\}$. Si ha

$$g(P_4) = \frac{115}{3}\frac{115}{3}\left(115 - 2\frac{115}{3}\right) = \left(\frac{115}{3}\right)^3 = \frac{1520875}{27}, \quad g(A) = g(B) = g(C) = 0$$

quindi il massimo è $\frac{1520875}{27}$. Il massimo si ottiene quando $x = y = z = 115/3$, cioè quando la scatola è a forma cubica. $\square$

**ESERCIZIO 10.** Determinare il massimo ed il minimo assoluti di

$$f(x,y) = \frac{2}{1 + x^2 + y^2} - \frac{1}{2x^2 - 3}$$

su

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq 1,\ |y| \leq 1\}.$$

**SOLUZIONE**.

La funzione $f$ è definita (in quanto su $E$ si ha $x \neq \pm\sqrt{3/2}$) e continua su $E$ che è chiuso e limitato. Quindi $f$ ha massimo e minimo assoluti. Si ha

$$f_x(x,y) = 4x\left(\frac{1}{(3 - 2x^2)^2} - \frac{1}{(1 + x^2 + y^2)^2}\right) \quad , \quad f_y(x,y) = -\frac{4y}{(1 + x^2 + y^2)^2}$$

Quindi non ci sono punti singolari. Il sistema

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 0 \\ f_y(x,y) = 0 \end{cases}$$

risulta
$$\begin{cases} 4x\left(\frac{1}{(3-2x^2)^2}-\frac{1}{(1+x^2+y^2)^2}\right) & =0 \\ -\frac{4y}{(1+x^2+y^2)^2} & =0 \end{cases}$$
Dalla seconda equazione ricaviamo $y=0$. Sostituendo nella prima otteniamo
$$4x\left(\frac{1}{(3-2x^2)^2}-\frac{1}{(1+x^2)^2}\right)=0$$
Quindi $x=0$ oppure $\frac{1}{(3-2x^2)^2}=\frac{1}{(1+x^2)^2}$. Ma quest'ultima equazione equivale a $(3-2x^2)^2=(1+x^2)^2$ (stiamo lavorando su $E$, quindi tutto è definito). Si tratta di risolvere $(3-2x^2)=\pm(1+x^2)$.

Si ha $3-2x^2=1+x^2$ se e solo se $3x^2=2$, $x^2=2/3$, $x=\pm\sqrt{2/3}$.

Si ha $3-2x^2=-(1+x^2)$ se e solo se $x^2=4$, $x=\pm 2$ che sono ascisse di punti non in $E$.

Otteniamo quindi tre punti critici in $E$: $P_1=(0,0)$, $P_2=(\sqrt{2/3},0)$, $P_3=(-\sqrt{2/3},0)$, che sono tutti interni.

Per lo studio della frontiera, dividiamo lo studio in 4 parti, visto che la frontiera è costituita dai 4 lati del quadrato di vertici $A=(1,1)$, $B=(-1,1)$, $C=(-1,-1)$, $D=(1,-1)$.

Poniamo $P_t=(1,t)$, $-1\le t\le 1$, $g(t)=f(P_t)=1+\frac{2}{t^2+2}$. Si ha $g'(t)=-\frac{4t}{(t^2+2)^2}$, quindi $g'(t)=0$ per $t=0$. Dobbiamo quindi considerare i punti $A$, $D$, $Q=(1,0)$.

Poniamo $Q_t=(t,1)$, $-1\le t\le 1$, $h(t)=f(Q_t)=\frac{2}{2+t^2}-\frac{1}{2t^2-3}$. Si ha $h'(t)=4t\left(\frac{1}{(3-2t^2)^2}-\frac{1}{(2+t^2)^2}\right)$, quindi $h'(t)=0$ per $t=0$, $\pm 1/\sqrt{3}$, $\pm\sqrt{5}$. Dobbiamo quindi considerare i punti $A$, $B$, $M_1=(0,1)$, $M_2=(1/\sqrt{3},1)$, $M_3=(-1/\sqrt{3},1)$.

Poniamo $R_t=(-1,t)$, $-1\le t\le 1$, $k(t)=f(R_t)=1+\frac{2}{t^2+2}$. Si ha $k'(t)=-\frac{4t}{(t^2+2)^2}$, quindi $k'(t)=0$ per $t=0$. Dobbiamo quindi considerare i punti $C$, $B$, $R=(-1,0)$.

Poniamo $S_t=(t,-1)$, $-1\le t\le 1$, $u(t)=f(S_t)=\frac{2}{2+t^2}-\frac{1}{2t^2-3}$. Si ha $u'(t)=4t\left(\frac{1}{(3-2t^2)^2}-\frac{1}{(2+t^2)^2}\right)$, quindi $u'(t)=0$ per $t=0$, $\pm 1/\sqrt{3}$, $\pm\sqrt{5}$. Dobbiamo quindi considerare i punti $C$, $D$, $N_1=(0,-1)$, $N_2=(1/\sqrt{3},-1)$, $N_3=(-1/\sqrt{3},-1)$.

Si tratta quindi di considerare l'insieme
$$X=\{P_1,P_2,P_3,A,B,C,D,M_1,M_2,M_3,N_1,N_2,N_3,Q,R\}.$$
Si ha
$$f(P_1)=\frac{7}{3},\quad f(P_2)=f(P_3)=\frac{9}{5},\quad f(A)=f(B)=f(C)=f(D)=\frac{5}{3}$$
$$f(M_1)=\frac{4}{3},\quad f(M_2)=f(M_3)=\frac{9}{7},\quad f(N_1)=\frac{4}{3},\quad f(N_2)=f(N_3)=\frac{9}{7},\quad f(Q)=f(R)=2$$
quindi il massimo è $\frac{7}{3}$ ed il minimo è $\frac{9}{7}$. □

Alternativa. Osservo che in $f(x,y)$ sia $x$ sia $y$ compaiono solo al quadrato. Posso allora considerare
$$g(x,y)=\frac{2}{1+x+y}-\frac{1}{2x-3}$$

su

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1\}.$$

Quindi il massimo e minimo assoluti di $f$ su $E$ coincidono con il massimo e minimo assoluti di $g$ su $D$.

Si ha

$$g_x = \frac{2}{(2x-3)^2} - \frac{2}{(x+y+1)^2} \quad , \quad g_y = -\frac{2}{(x+y+1)^2}$$

quindi non ci sono punti singolari e punti critici.

Per lo studio della frontiera, dividiamo lo studio in 4 parti, visto che la frontiera è costituita dai 4 lati del quadrato di vertici $A = (0, 0)$, $B = (1, 0)$, $C = (1, 1)$, $D = (0, 1)$.

Poniamo $P_t = (0, t)$, $0 \leq t \leq 1$, $v(t) = g(P_t) = \frac{2}{t+1} + \frac{1}{3}$. Si ha $v'(t) = -\frac{2}{(t+1)^2}$, quindi $v'(t) = 0$ mai. Dobbiamo quindi considerare i punti $A$, $D$.

Poniamo $Q_t = (t, 0)$, $0 \leq t \leq 1$, $h(t) = g(Q_t) = \frac{2}{t+1} - \frac{1}{2t-3}$. Si ha $h'(t) = \frac{2}{(2t-3)^2} - \frac{2}{(t+1)^2}$, quindi $h'(t) = 0$ per $t = 2/3$, 4. Dobbiamo quindi considerare i punti $A$, $B$, $M = (2/3, 0)$.

Poniamo $R_t = (1, t)$, $0 \leq t \leq 1$, $k(t) = g(R_t) = \frac{2}{t+2} + 1$. Si ha $k'(t) = -\frac{2}{(t+2)^2}$, quindi $k'(t) = 0$ mai. Dobbiamo quindi considerare i punti $C$, $B$.

Poniamo $S_t = (t, 1)$, $0 \leq t \leq 1$, $u(t) = g(S_t) = \frac{2}{t+2} - \frac{1}{2t-3}$. Si ha $u'(t) = \frac{2}{(2t-3)^2} - \frac{2}{(t+2)^2}$, quindi $u'(t) = 0$ per $t = 5$, $1/3$. Dobbiamo quindi considerare i punti $C$, $D$, $N = (1/3, 1)$.

Si tratta quindi di considerare l'insieme

$$X = \{A, B, C, D, M, N\}.$$

Si ha

$$g(A) = \frac{7}{3}, \quad g(B) = 2, \quad g(C) = \frac{5}{3}, \quad g(D) = \frac{4}{3}, \quad g(M) = \frac{9}{5}, \quad g(N) = \frac{9}{7}$$

quindi il massimo assoluto è $\frac{7}{3}$ ed il minimo assoluto è $\frac{9}{7}$. $\square$

**ESERCIZIO 11.** Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x, y) = 2x^2 + x + y^2 - 2$$

per ogni $(x, y)$ in $\mathbb{R}^2$.

(a) Determinare i punti di massimo e minimo relativi e i punti di sella.

(b) Determinare il massimo ed il minimo assoluti di $f$ nella regione di piano

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4\}.$$

**SOLUZIONE.**

a) La funzione $f$ è definita su tutto $\mathbb{R}^2$ e non ha punti singolari. Calcoliamo i punti critici.

$$f_x = 4x + 1 \quad , \quad f_y = 2y$$

Il sistema

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 0 \\ f_y(x,y) = 0 \end{cases}$$

risulta

$$\begin{cases} 4x + 1 & = 0 \\ 2y & = 0 \end{cases}$$

quindi $x = -\frac{1}{4}$, $y = 0$. C'è un solo punto critico $P = (-\frac{1}{4}, 0)$.

Si ha

$$f_{xx}(x,y) = 4 \quad , \quad f_{yy}(x,y) = 2 \quad , \quad f_{xy}(x,y) = 0 \quad , \quad H(x,y) = 8$$

Quindi $H(P) = 8 > 0$ ed essendo $f_{xx}(P) = 4 > 0$, $P$ è un punto di minimo locale.

b) La funzione $f$ è continua, e $D$ è chiuso e limitato. Per il teorema, $f$ ha massimo e minimo assoluti su $D$.

Non ci sono punti singolari. L'insieme dei punti interni è

$$I(D) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 4\}.$$

Essendo $(-\frac{1}{4})^2 + 0 = \frac{1}{16} < 4$, si ha $P \in I(D)$ ($P$ è un punto critico interno).

Studio del bordo. Il bordo è la circonferenza $\mathcal{C}$ di equazione $x^2 + y^2 = 4$, quindi la circonferenza di centro l'origine e raggio 2. Un modo comodo per parametrizzare $\mathcal{C}$ è il seguente:

$$P_t = (2\cos t, 2\sin t)$$

al variare di $t$ in $\mathbb{R}$ (e basta $t$ in $[0, 2\pi]$ essendo $g$ periodica di periodo $2\pi$). Poniamo

$$g(t) = f(P_t) = 8\cos^2 t + 2\cos t + 4\sin^2 t - 2$$

Per determinare i punti di $[0, 2\pi]$ candidati ad essere punti di massimo o minimo assoluti di $g$, basta determinare i punti critici in $[0, 2\pi]$, in quanto $g$ è periodica e derivabile (in genere bisogna trovare i punti critici in $(0, 2\pi)$, i punti singolari in $(0, 2\pi)$, e aggiungere $0$, $2\pi$).

Si ha

$$g'(t) = -16\cos t\sin t - 2\sin t + 8\sin t\cos t = -8\sin t\cos t - 2\sin t = -2\sin t(4\cos t + 1)$$

Quindi $g'(t) = 0$ se e solo se $\sin t(4\cos t + 1) = 0$ se e solo se $\sin t = 0$ oppure $\cos t = -\frac{1}{4}$. Quali punti di $\mathcal{C}$ otteniamo? I punti per cui $\sin t = 0$, hanno $\cos t = \pm 1$ e quindi, essendo $P_t = (2\cos t, 2\sin t)$, sono i punti

$$A = (-2, 0) \quad , \quad B = (2, 0)$$

I punti per cui $\cos t = -\frac{1}{4}$, hanno $\sin t = \pm\sqrt{1-(-\frac{1}{4})^2} = \pm\frac{\sqrt{15}}{4}$ e quindi, essendo $P_t = (2\cos t, 2\sin t)$, sono i punti

$$Q_1 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{15}}{2}\right) \quad . \quad Q_2 = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{15}}{2}\right)$$

Concludendo, poiché non ci sono punti singolari, i punti dove il massimo ed il minimo sono assunti sono nell'insieme

$$X = \{P, A, B, Q_1, Q_2\}$$

Ora $f(P) = -\frac{17}{8}$, $f(A) = 4$, $f(B) = 8$, $f(Q_1) = f(Q_2) = \frac{7}{4}$ quindi il massimo assoluto è 8 (assunto in $B$) ed il minimo assoluto è $-\frac{17}{8}$ (assunto in $P$). $\square$

**ESERCIZIO 12.** Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = 3x^2 + 12x + 2y^2 - \frac{1}{4}\left(112 + 25\sqrt{2}\right) y - 400$$

per ogni $(x,y)$ in $\mathbb{R}^2$.
Determinare il massimo ed il minimo assoluti di $f$ nella regione di piano

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{(x+2)^2}{9} + \frac{(y-7)^2}{16} \le 25\}.$$

**SOLUZIONE**.

La funzione $f$ è definita su tutto $\mathbb{R}^2$ e non ha punti singolari. La funzione $f$ è continua, e $D$ è chiuso e limitato. Per il teorema, $f$ ha massimo e minimo assoluti su $D$. Calcoliamo i punti critici.

$$f_x = 6x + 12 \quad , \quad f_y = 4y - \frac{25}{2\sqrt{2}} - 28$$

Il sistema

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 0 \\ f_y(x,y) = 0 \end{cases}$$

risulta

$$\begin{cases} 6x + 12 & = 0 \\ 4y - \frac{25}{2\sqrt{2}} - 28 & = 0 \end{cases}$$

quindi $x = -2$, $y = 7 + \frac{25}{8\sqrt{2}}$. C'è un solo punto critico $P = (-2, 7 + \frac{25}{8\sqrt{2}})$.

L'insieme dei punti interni è

$$I(D) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{(x+2)^2}{9} + \frac{(y-7)^2}{16} < 25\}.$$

Essendo $0 + \frac{(\frac{25}{8\sqrt{2}})^2}{16} = \frac{625}{2048} < 25$, si ha $P \in I(D)$ ($P$ è un punto critico interno).

Studio del bordo. Il bordo è l'ellisse $\mathcal{C}$ di equazione $\frac{(x+2)^2}{9} + \frac{(y-7)^2}{16} = 25$, con centro in $(-2, 7)$. Un modo comodo per parametrizzare $\mathcal{C}$ è il seguente:

$$\frac{x+2}{3} = 5\cos t \quad , \quad \frac{y-7}{4} = 5\sin t$$

per $0 \leq t \leq 2\pi$. Quindi $x = 15\cos t - 2$, $y = 20\sin t + 7$. Considero quindi il punto

$$P_t = (15\cos t - 2, 20\sin t + 7)$$

al variare di $t$ in $[0, 2\pi]$. Poniamo

$$g(t) = f(P_t) = 2(20\sin t+7)^2 + \frac{1}{20}\left(-560 - 125\sqrt{2}\right)(20\sin t+7) + 3(15\cos t-2)^2 + 12(15\cos t-2) - 400$$

$$= 800\sin^2 t - 125\sqrt{2}\sin t + 675\cos^2 t - \frac{175}{2\sqrt{2}} - 510$$

Per determinare i punti di $[0, 2\pi]$ candidati ad essere punti di massimo o minimo assoluti di $g$, basta determinare i punti critici in $[0, 2\pi]$, in quanto $g$ è periodica e derivabile (in genere bisogna trovare i punti critici in $(0, 2\pi)$, i punti singolari in $(0, 2\pi)$, e aggiungere $0$, $2\pi$).

Si ha

$$g'(t) = 250\sin t\cos t - 125\sqrt{2}\cos t = 125\cos t(2\sin t - \sqrt{2})$$

Quindi $g'(t) = 0$ se e solo se $\cos t(2\sin t - \sqrt{2}) = 0$ se e solo se $\cos t = 0$ oppure $\sin t = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Quali punti di $\mathcal{C}$ otteniamo? I punti per cui $\cos t = 0$ (ossia $t = \pm\frac{\pi}{2}$), hanno $\sin t = \pm 1$ e quindi, essendo $P_t = (15\cos t - 2, 20\sin t + 7)$, sono i punti

$$A = (-2, 27) \quad , \quad B = (-2, -13)$$

I punti per cui $\sin t = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (ossia $t = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$), hanno $\cos t = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ e quindi, essendo
$P_t = (15\cos t - 2, 20\sin t + 7)$, sono i punti

$$Q_1 = \left(\frac{15}{\sqrt{2}} - 2, 7 + 10\sqrt{2}\right) \quad . \quad Q_2 = \left(-2 - \frac{15}{\sqrt{2}}, 7 + 10\sqrt{2}\right)$$

Concludendo, i punti dove il massimo ed il minimo assoluti di $f$ su $D$ sono assunti, sono nell'insieme

$$X = \{P, A, B, Q_1, Q_2\}$$

Ora $f(P) = -\frac{5}{64}\left(6653 + 560\sqrt{2}\right)$, $f(A) = 290 - \frac{675}{2\sqrt{2}}$, $f(B) = \frac{5}{4}\left(232 + 65\sqrt{2}\right)$, $f(Q_1) = f(Q_2) = -\frac{5}{4}\left(35\sqrt{2} - 82\right)$ quindi il massimo assoluto è $\frac{5}{4}\left(232 + 65\sqrt{2}\right)$ (assunto in $B$) ed il minimo assoluto è $-\frac{5}{64}\left(6653 + 560\sqrt{2}\right)$ (assunto in $P$). $\square$