
Istituzioni di Matematiche Modulo B (SG)

VI foglio di esercizi

ESERCIZIO 1. Calcolare i seguenti integrali doppi.

- 1) $\iint_D xy(x+y) \, dx \, dy, \quad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\},$
- 2) $\iint_D (x^3 + 3x^2y + y^3) \, dx \, dy, \quad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\},$
- 3) $\iint_D (\sqrt{y} + x - 3xy^2) \, dx \, dy, \quad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 3\},$
- 4) $\iint_D \sin^2 x \sin^2 y \, dx \, dy, \quad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \pi\},$
- 5) $\iint_D \sin(x+y) \, dx \, dy, \quad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq \pi/2, 0 \leq y \leq \pi/2\},$
- 6) $\iint_D |\cos(x+y)| \, dx \, dy, \quad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \pi\}.$

ESERCIZIO 2. Disegnare la regione D e calcolare l'integrale doppio.

- 1) $\iint_D x \cos(x+y) \, dx \, dy, \quad D \text{ è il triangolo di vertici } (0,0), (\pi,0), (\pi,\pi),$
- 2) $\iint_D (1+x) \sin y \, dx \, dy, \quad D \text{ è il trapezio di vertici } (0,0), (0,1), (1,2), (1,0),$
- 3) $\iint_D e^{x+y} \, dx \, dy, \quad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| \leq 1\},$
- 4) $\iint_D x^2 y^2 \, dx \, dy, \quad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y > 0, 1 \leq xy \leq 2, x \leq y \leq 4x\},$
- 5) $\iint_D (x^2 - y^2) \, dx \, dy, \quad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq \sin x, 0 \leq x \leq \pi\},$

ESERCIZIO 3. Una lamina piana è limitata da un arco della parabola $y = 2x - x^2$ e dal segmento $\{(x,0) \mid 0 \leq x \leq 2\}$. Determinare la massa della lamina, sapendo che la densità nel punto (x,y) è $(1-y)/(1+x)$.

ESERCIZIO 4. Trovare il volume del solido

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq z \leq 20 - 2x + 4y\}.$$

ESERCIZIO 5. Calcolare i seguenti integrali doppi con una trasformazione a coordinate polari.

- 1) $\iint_D e^{x^2+y^2} dx dy, \quad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0\},$
- 2) $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy \quad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4 \leq x^2 + y^2 \leq 9, y \geq 0\},$
- 3) $\iint_D x^2 y^2 dx dy, \quad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq R^2, x + y \geq 0\}, R > 0.$

ESERCIZIO 6. Calcolare gli integrali tripli.

- 1) $\iiint_D xy^2 z^3 dx dy dz, \quad D = \{(x, y, z) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x, 0 \leq z \leq xy\}$
- 2) $\iiint_D (1 + x + y + z)^{-3} dx dy dz, \quad D \text{ è il solido limitato dai piani } x = 0, y = 0, z = 0$
 $x + y + z = 1,$
- 3) $\iiint_D \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right) dx dy dz, \quad D \text{ è il solido limitato dall'ellissoide } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$
 $a > 0, b > 0, c > 0,$
- 4) $\iiint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz, \quad D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq z^2 \leq 1\}.$

ESERCIZIO 7. Calcolare la massa del solido compreso tra le superfici sferiche concentriche di raggio rispettivamente a, b , con $0 < a < b$, se la densità in ogni punto è uguale al quadrato della distanza di questo punto dal centro.

ESERCIZIO 8. Sia S la parte superiore della superficie conica $x^2 + y^2 = z^2$ interna al cilindro $x^2 + y^2 = 2x$. Calcolare il valore dell'integrale superficiale

$$\iint_S (x^4 - y^4 + y^2 z^2 - z^2 x^2 + 1) dS \quad .$$

ESERCIZIO 9. Trovare il momento d'inerzia rispetto all'asse delle y della curva $\mathcal{C}$ di equazioni parametriche $x = e^t, y = \sqrt{2}t, z = e^{-t}$, con $0 \leq t \leq 1$. Si tratta cioè di calcolare

$$\int_{\mathcal{C}} (x^2 + z^2) ds \quad .$$