Istituzioni di Matematiche Modulo B (SG)

VI foglio di esercizi

ESERCIZIO 1. Calcolare i seguenti integrali doppi.

$$
\begin{array}{lll}
1) & \displaystyle\iint_D xy(x+y)\,dx\,dy, & D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1\}\ , \\
2) & \displaystyle\iint_D (x^3+3x^2y+y^3)\,dx\,dy, & D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1\}\ , \\
3) & \displaystyle\iint_D (\sqrt{y}+x-3xy^2)\,dx\,dy, & D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 3\}\ , \\
4) & \displaystyle\iint_D \sin^2 x\sin^2 y\,dx\,dy, & D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\le x\le \pi,\ 0\le y\le \pi\}\ , \\
5) & \displaystyle\iint_D \sin(x+y)\,dx\,dy, & D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\le x\le \pi/2,\ 0\le y\le \pi/2\}\ , \\
6) & \displaystyle\iint_D |\cos(x+y)|\,dx\,dy, & D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\le x\le \pi,\ 0\le y\le \pi\}\ .
\end{array}
$$

SOLUZIONE.

1) $I=\int_0^1 dx\int_0^1 xy(x+y)\,dy=\int_0^1\left(\frac{1}{3}x+\frac{1}{2}x^2\right)\,dx=\frac{1}{3}$.

2) $I=\int_0^1 dx\int_0^1(x^3+3x^2y+y^3)\,dy=\int_0^1\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{2}x^2+x^3\right)\,dx=1$

3) $I=\int_0^1 dx\int_0^3(\sqrt{y}+x-3xy^2)\,dy=2\int_0^1\left(\sqrt{3}-12x\right)\,dx=-12+2\sqrt{3}$

4) $I=\int_0^\pi dx\int_0^\pi\sin^2 x\sin^2 y\,dy=\int_0^\pi\sin^2 x\left[\frac{1}{2}y-\frac{1}{2}\cos y\sin y\right]_0^\pi\,dx=\frac{1}{2}\pi\int_0^\pi\sin^2 x\,dx=\frac{1}{4}\pi^2$.

5) $I=\int_0^{\pi/2} dx\int_0^{\pi/2}\sin(x+y)\,dy=\int_0^{\pi/2}\left[-\cos(x+y)\right]_0^{\pi/2}\,dx=\int_0^{\pi/2}(\cos x+\sin x)\,dx=2$.

6) Bisogna fare attenzione al segno di $\cos(x+y)$. Poichè $0\le x\le\pi$ e $0\le y\le\pi$, si ha $0\le x+y\le 2\pi$. In questo intervallo si ha $\cos(x+y)\ge 0$ se $0\le x+y\le\frac{1}{2}\pi$ oppure se $\frac{3}{2}\pi\le x+y\le 2\pi$.

Pertanto

$$
\begin{aligned}
I=\iint_D|\cos(x+y)|\,dx\,dy=&\int_0^{\frac{1}{2}\pi}dx\int_0^{\frac{1}{2}\pi-x}\cos(x+y)\,dy+\\
&+\int_0^{\frac{1}{2}\pi}dx\int_{\frac{1}{2}\pi-x}^{\pi}-\cos(x+y)\,dy+\int_{\frac{1}{2}\pi}^{\pi}dx\int_0^{\frac{3}{2}\pi-x}-\cos(x+y)\,dy+\\
&+\int_{\frac{1}{2}\pi}^{\pi}dx\int_{\frac{3}{2}\pi-x}^{\pi}\cos(x+y)\,dy
\end{aligned}
$$

Una primitiva di $\cos(x+y)$ nella variabile y è $\sin(x+y)$. Applicando poi la formula $\sin(\alpha+\beta)=$

$\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$ si ottiene

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} dx \int_0^{\frac{1}{2}\pi-x} \cos(x+y)\,dy = \frac{1}{2}\pi - 1$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} dx \int_{\frac{1}{2}\pi-x}^{\pi} -\cos(x+y)\,dy = 1+\frac{1}{2}\pi$$

$$\int_{\frac{1}{2}\pi}^{\pi} dx \int_0^{\frac{3}{2}\pi-x} -\cos(x+y)\,dy = 1+\frac{1}{2}\pi$$

$$\int_{\frac{1}{2}\pi}^{\pi} dx \int_{\frac{3}{2}\pi-x}^{\pi} \cos(x+y)\,dy = \frac{1}{2}\pi - 1$$

quindi $I=2\pi$. □

ESERCIZIO 2. Disegnare la regione D e calcolare l'integrale doppio.

1) $\iint_D x\cos(x+y)\,dx\,dy$, D è il triangolo di vertici $(0,0)$, $(\pi,0)$, (π,π) ,

2) $\iint_D (1+x)\sin y\,dx\,dy$, D è il trapezio di vertici $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,2)$, $(1,0)$,

3) $\iint_D e^{x+y}\,dx\,dy$, $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid |x|+|y|\le 1\}$,

4) $\iint_D x^2y^2\,dx\,dy$, $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x>0\,,y>0\,,1\le xy\le 2\,,x\le y\le 4x\}$,

5) $\iint_D (x^2-y^2)\,dx\,dy$, $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\le y\le \sin x,\ 0\le x\le\pi\}$,

SOLUZIONE.

1) $I=\int_0^{\pi} dx \int_0^{x} x\cos(x+y)\,dy = \frac{1}{4}\int_0^{\pi}(4x\cos x - 2x\cos 2x - 4\sin x + \sin 2x)\,dx = -\frac{3}{2}\pi$.

2) $I=\int_0^{1} dx \int_0^{x+1}(1+x)\sin y\,dy = \frac{1}{2}\int_0^{1}(2\,x + x^2 - 2\,\cos(1+x) - 2\,\sin(1+x) - 2\,x\,\sin(1+x))\,dx$ $=\frac{3}{2}+\cos(1)-\cos(2)+\sin(1)-2\,\sin(2)$.

3) $I=\int_0^{1} dx \int_{x-1}^{-x+1} e^{x+y}\,dy + \int_{-1}^{0} dx \int_{-x-1}^{x+1} e^{x+y}\,dy = \frac{1}{2}(e+e^{-1}) + \frac{1}{2}(e-3e^{-1}) = e-\frac{1}{e}$.

4) Il dominio D è delimitato, nel primo quadrante, dalle rette $y=x$, $y=4x$, e dai rami di iperbole $y=1/x$, $y=2/x$. Calcolando le intersezioni, troviamo $A=(\frac{1}{2},2)$, $B=(1,1)$, $C=(\sqrt{2},\sqrt{2})$, $D=(\sqrt{2}/2,2\sqrt{2})$. Analizzando bene la figura, ed essendo $\frac{1}{2}<\frac{\sqrt{2}}{2}<1<\sqrt{2}$, si ottiene:

$$\begin{aligned} I=\iint_D x^2y^2\,dx\,dy &= \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}\sqrt{2}} dx \int_{\frac{1}{x}}^{4x} x^2y^2\,dy + \\ &+ \int_{\frac{1}{2}\sqrt{2}}^{1} dx \int_{\frac{1}{x}}^{\frac{2}{x}} x^2y^2\,dy + \\ &+ \int_{1}^{\sqrt{2}} dx \int_{x}^{\frac{2}{x}} x^2y^2\,dy \end{aligned}$$

quindi

$$I = \frac{1}{18}(7 - 3\log 2) + \frac{7}{6}\,\log 2 + \left(\frac{1}{18} + \frac{4}{9}(-1 + \log 8)\right) = \frac{7}{3}\,\log 2$$

Alternativa. Poniamo $u = xy$, $v = y/x$, ed osserviamo che posto $S = \{(u,v) \mid 1 \leq u \leq 2, 1 \leq v \leq 4\}$, sia ha una biiezione $\Phi : S \to D$, $x = \sqrt{u/v}$, $y = \sqrt{uv}$. Per il calcolo dello Jacobiano, è più comodo calcolare lo Jacobiano dell'inversa Ψ di Φ, $\Psi : D \to S$, $u = xy$, $v = y/x$. Si ha $\frac{\partial u}{\partial x} = y$, $\frac{\partial u}{\partial y} = x$, $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{y}{x^2}$, $\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{x}$, quindi $J(\Psi) = y\frac{1}{x} - x(-\frac{y}{x^2}) = 2y/x$. Ora in generale si ha $J(\Phi) = 1/J(\Psi)$, ed essendo $2y/x = 2v$, otteniamo $J(\Phi) = \frac{1}{2v}$ che, visto S, è sempre maggiore di 0. Quindi

$$I = \iint_D x^2y^2\,dx\,dy = \iint_S u^2\frac{1}{2v}\,du\,dv$$

e infine

$$I = \int_1^2 du \int_1^4 \frac{u^2}{v}\,dv = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}u^3\right]_1^2 [\log v]_1^4 = \frac{1}{2}\,\frac{1}{3}\,(8-1)\log 4 = \frac{7}{3}\,\log 2$$

5)

$$I = \int_0^\pi dx \int_0^{\sin x} (x^2 - y^2)\,dy = \int_0^\pi (x^2\,\sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x)\,dx$$

Calcoliamo una primitiva di $x^2 \sin x$ ed una primitiva di $\sin^3 x$:

$$\int x^2 \sin x\,dx = x^2(-\cos x) - \int 2x(-\cos x)\,dx = -x^2\cos x + \int 2x\cos x\,dx =$$

$$= -x^2\cos x + (2x\sin x - \int 2\sin x\,dx) = -x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x$$

$$\int \sin^3 x\,dx = \int \sin x \sin^2 x\,dx = \int \sin x(1-\cos^2 x)\,dx =$$

$$= \int \sin x\,dx - \int \sin x\cos^2 x\,dx = -\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x$$

Quindi

$$I = \int_0^\pi x^2\sin x\,dx - \frac{1}{3}\int_0^\pi \sin^3 x\,dx = \left[-x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x\right]_0^\pi - \frac{1}{3}\left[-\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x\right]_0^\pi$$

$$= -\pi^2(-1) + 0 - 2 - (0 + 0 + 2) - \frac{1}{3}\left(-(-1) + \frac{1}{3}(-1) - (-1 + \frac{1}{3})\right)$$

$$= \pi^2 - 2 - 2 - \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{3}\right) = \pi^2 - 4 - \frac{1}{3}\left(2 - \frac{2}{3}\right) = \pi^2 - 4 - \frac{4}{9} = \pi^2 - \frac{40}{9}$$

□

ESERCIZIO 3. Una lamina piana è limitata da un arco della parabola $y = 2x - x^2$ e dal segmento $\{(x,0) \mid 0 \leq x \leq 2\}$. Determinare la massa della lamina, sapendo che la densità nel punto (x,y) è $(1-y)/(1+x)$.

SOLUZIONE.

La lamina occupa la regione di piano $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2x - x^2\}$. Si tratta di calcolare

$$I = \iint_D \frac{1-y}{1+x}\, dx\, dy$$

Si ha

$$I = \int_0^2 dx \int_0^{2x-x^2} \frac{1-y}{1+x}\, dy = \int_0^2 \frac{1}{1+x}\, dx \int_0^{2x-x^2} (1-y)\, dy$$

Calcoliamo

$$\int_0^{2x-x^2} (1-y)\, dy = \left[y - \frac{1}{2} y^2 \right]_{y=0}^{y=2x-x^2} = \left(2x - x^2 - \frac{1}{2}(2x - x^2)^2 \right) - (0-0) =$$

$$= 2x - x^2 - \frac{1}{2}(4x^2 + x^4 - 4x^3) = \frac{1}{2}(4x - 6x^2 + 4x^3 - x^4)$$

quindi

$$I = \frac{1}{2} \int_0^2 \frac{4x - 6x^2 + 4x^3 - x^4}{1+x}\, dx$$

Calcoliamo una primitiva di $\frac{4x-6x^2+4x^3-x^4}{1+x}$. Mediante l'algoritmo di divisione si ottiene

$$4x - 6x^2 + 4x^3 - x^4 = (15 - 11x + 5x^2 - x^3)(x+1) - 15$$

quindi

$$\frac{4x - 6x^2 + 4x^3 - x^4}{1+x} = 15 - 11x + 5x^2 - x^3 - \frac{15}{x+1}$$

Una primitiva di

$$\frac{4x - 6x^2 + 4x^3 - x^4}{1+x}$$

è

$$15x - \frac{11}{2}x^2 + \frac{5}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 - 15 \log|x+1|$$

pertanto, essendo $x + 1 \geq 0$ per $0 \leq x \leq 2$

$$I = \frac{1}{2} \left[15x - \frac{11}{2}x^2 + \frac{5}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 - 15 \log(x+1) \right]_0^2 =$$

$$= \frac{1}{2} \left(30 - 22 + \frac{40}{3} - 4 - 15 \log 3 \right) = \frac{52}{6} - \frac{15}{2} \log 3$$

$\square$

ESERCIZIO 4. Trovare il volume del solido

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq z \leq 20 - 2x + 4y\}.$$

SOLUZIONE.

E è la parte di spazio compresa tra il grafico di due funzioni: $f(x,y) = x^2+y^2$, $g(x,y) = 20-2x+4y$. Ma dove sono definite? Per quali (x,y) troviamo z tale che $x^2+y^2 \le z \le 20-2x+4y$? Esattamente quando $x^2+y^2 \le 20-2x+4y$, quindi si tratta di calcolare

$$I = \iint_D (20-2x+4y-(x^2+y^2))\,dx\,dy$$

dove

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \le 20-2x+4y\} \quad .$$

Consideriamo la conica

$$\mathcal{C} : x^2+y^2 = 20-2x+4y \quad .$$

Scritta nel modo $\mathcal{C} : x^2+y^2+2x-4y-20 = 0$, si riconosce che $\mathcal{C}$ è una circonferenza (in genere se $\mathcal{C} : ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f = 0$, si considera il segno del discriminante b^2-4ac. Nel nostro caso $a = c = 1$, $b = 0$ ed il discriminante $b^2-4ac = -4 < 0$, quindi $\mathcal{C}$ è un'ellisse, inoltre non c'è il termine in xy e i coefficienti di x^2 e y^2 sono uguali, quindi $\mathcal{C}$ è una circonferenza). È facile in questo caso stabilire subito il centro $C = (\alpha,\beta)$ ed il raggio R di $\mathcal{C}$, ma seguiamo il metodo generale. Poichè i coefficienti di x^2 e y^2 sono uguali a 1, si tratta di determinare α, β, R in modo che

$$x^2+y^2+2x-4y-20 = (x-\alpha)^2+(y-\beta)^2-R^2.$$

Si ha $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2-R^2 = x^2-2\alpha x+\alpha^2+y^2-2\beta y+\beta^2-R^2$ e quindi imponendo l'uguaglianza dei coefficienti, otteniamo

$$-2\alpha = 2, \quad -2\beta = -4, \quad \alpha^2+\beta^2-R^2 = -20 \quad .$$

Quindi $\alpha = -1$, $\beta = 2$, ed il centro è $C = (-1,2)$. A questo punto da $\alpha^2+\beta^2-R^2 = -20$ segue

$$R^2 = 20+\alpha^2+\beta^2 = 20+(-1)^2+2^2 = 20+1+4 = 25$$

e quindi $R = 5$. Pertanto $\mathcal{C}$ ha equazione $\mathcal{C} : (x+1)^2+(y-2)^2 = 25$.

In particolare osserviamo che dai conti fatti risulta tra l'altro

$$(*) \qquad x^2+y^2+2x-4y-20 = (x+1)^2+(y-2)^2-25$$

Come già detto, in questo caso $(*)$ si otteneva immediatamente da $x^2+y^2+2x-4y-20$ completando i quadrati:
$x^2+y^2+2x-4y-20 = x^2+2x+1-1+y^2-4y+4-4-20 = (x+1)^2+(y-2)^2-25$.

Per calcolare I cambiamo variabili:

$$\begin{cases} x+1 = r\cos\vartheta \\ y-2 = r\sin\vartheta \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} x = -1 + r\cos\vartheta \\ y = 2 + r\sin\vartheta \end{cases}$$

dove $0 \le r \le 5$, $0 \le \vartheta \le 2\pi$. La matrice Jacobiana della trasformazione è

$$X = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \vartheta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \vartheta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -r\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & r\cos\vartheta \end{pmatrix}$$

quindi lo Jacobiano $J(\Phi) = \det X$ è

$$r\cos^2\vartheta + r\sin^2\vartheta = r$$

che è maggiore o uguale a 0. Quindi l'elemento infinitesimo di area nelle nuove coordinate è

$$dA = r\,dr\,d\vartheta$$

Si ha

$$I = \iint_S g(r,\vartheta)\; r\,dr\,d\vartheta$$

dove

$$S = \{(r,\vartheta) \mid 0 \le r \le 5,\ 0 \le \vartheta \le 2\pi\} \quad .$$

La funzione $g(r,\vartheta)$ si ottiene sostituendo $x = -1 + r\cos\vartheta$, $y = 2 + r\sin\vartheta$ in

$$h(x,y) = 20 - 2x + 4y - (x^2 + y^2)$$

Tuttavia possiamo utilizzare direttamente $(*)$:

$$-h(x,y) = x^2 + y^2 + 2x - 4y - 20 = (x+1)^2 + (y-2)^2 - 25 = (r\cos\vartheta)^2 + (r\sin\vartheta)^2 - 25 = r^2 - 25$$

Quindi

$$20 - 2x + 4y - (x^2 + y^2) = h(x,y) = -(r^2 - 25) = 25 - r^2$$

Pertanto

$$I = \iint_S (25 - r^2)\; r\,dr\,d\vartheta = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^5 (25r - r^3)\,dr = [\vartheta]_0^{2\pi} \left[\frac{25}{2}r^2 - \frac{1}{4}r^4\right]_0^5 = 2\pi\frac{625}{4} = \frac{625}{2}\pi$$

$\square$

ESERCIZIO 5. Calcolare i seguenti integrali doppi con una trasformazione a coordinate polari.

1) $\displaystyle\iint_D e^{x^2+y^2}\,dx\,dy,$ $\qquad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \le 4,\ y \ge 0\}\,,$

2) $\displaystyle\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$ $\qquad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4 \le x^2 + y^2 \le 9,\ y \ge 0\}\,,$

3) $\displaystyle\iint_D x^2y^2\,dx\,dy,$ $\qquad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \le R^2,\ x + y \ge 0\}\,, R > 0.$

SOLUZIONE.

In ciascun caso indichiamo con S il corrispondente insieme in coordinate polari.

1) $S = \{(\rho, \vartheta) \mid \; 0 \le \rho \le 2,\, 0 \le \vartheta \le \pi\}$.

$$I = \iint_D e^{x^2+y^2}\, dx\, dy = \iint_S e^{\rho^2} \rho\, d\rho\, d\vartheta = \int_0^\pi d\vartheta \int_0^2 \rho e^{\rho^2}\, d\rho = [\vartheta]_0^\pi \left[\frac{1}{2} e^{\rho^2}\right]_0^2 = \frac{\pi}{2}(e^4 - 1)$$

2) $S = \{(\rho, \vartheta) \mid \; 2 \le \rho \le 3,\, 0 \le \vartheta \le \pi\}$.

$$I = \iint_D \sqrt{x^2+y^2}\, dx\, dy = \iint_S \rho\rho\, d\rho\, d\vartheta = \int_0^\pi d\vartheta \int_2^3 \rho^2\, d\rho = [\vartheta]_0^\pi \left[\frac{1}{3}\rho^3\right]_2^3 = \frac{19}{3}\pi$$

3) Qui R è una costante positiva. $S = \{(\rho, \vartheta) \mid \; 0 \le \rho \le R,\, -\frac{\pi}{4} \le \vartheta \le \frac{3}{4}\pi\}$.

$$I = \iint_D x^2\, y^2\, dx\, dy = \iint_S \rho^4 \cos^2\vartheta \sin^2\vartheta\, \rho\, d\rho\, d\vartheta =$$

$$= \int_{-\frac{1}{4}\pi}^{\frac{3}{4}\pi} d\vartheta \int_0^R \rho^5 \cos^2\vartheta \sin^2\vartheta\, d\rho = \int_{-\frac{1}{4}\pi}^{\frac{3}{4}\pi} \cos^2\vartheta \sin^2\vartheta\, d\vartheta \int_0^R \rho^5\, d\rho$$

Calcoliamo a parte una primitiva di $\cos^2\vartheta \sin^2\vartheta$. Si ha

$$\cos\vartheta \sin\vartheta = \frac{1}{2}\sin 2\vartheta \quad , \quad \cos^2\vartheta \sin^2\vartheta = \frac{1}{4}\sin^2 2\vartheta$$

Ma $\cos 2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$, quindi $\sin^2\alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha)$. Ne consegue che $\sin^2 2\vartheta = \frac{1}{2}(1 - \cos 4\vartheta)$, e infine

$$\cos^2\vartheta \sin^2\vartheta = \frac{1}{4}\sin^2 2\vartheta = \frac{1}{8}(1 - \cos 4\vartheta)$$

Pertanto una primitiva di $\cos^2\vartheta \sin^2\vartheta$ è

$$\frac{1}{8}\vartheta - \frac{1}{32}\cos 4\vartheta$$

e infine

$$I = \left[\frac{1}{8}\vartheta - \frac{1}{32}\sin 4\vartheta\right]_{-\frac{1}{4}\pi}^{\frac{3}{4}\pi} \left[\frac{1}{6}\rho^6\right]_0^R = \frac{\pi}{48} R^6$$

□

ESERCIZIO 6. Calcolare gli integrali tripli.

1) $\displaystyle\iiint_D xy^2 z^3\, dx\, dy\, dz,$ $\qquad D = \{(x, y, z) \mid 0 \le x \le 1,\, 0 \le y \le x,\, 0 \le z \le xy\}$

2) $\displaystyle\iiint_D (1 + x + y + z)^{-3}\, dx\, dy\, dz,$ $\qquad D$ è il solido limitato dai piani $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$
$x + y + z = 1$,

3) $\displaystyle\iiint_D \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right) dx\, dy\, dz,$ $\qquad D$ è il solido limitato dall'ellissoide $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$,
$a > 0, b > 0, c > 0$,

4) $\displaystyle\iiint_D \sqrt{x^2 + y^2}\, dx\, dy\, dz,$ $\qquad D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \le z^2 \le 1\}$.

SOLUZIONE.

1)
$$I = \iiint_D xy^2z^3\,dx\,dy\,dz = \int_0^1 dx \int_0^x dy \int_0^{xy} xy^2z^3\,dz = \frac{1}{364}$$

2) Qui $D = \{(x,y,z) \mid x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ x+y+z \leq 1\}$.

$$I = \iiint_D (1+x+y+z)^{-3}\,dx\,dy\,dz = \int_0^1 dx \iint_{D(x)} (1+x+y+z)^{-3}\,dy\,dz$$

dove $D(x) = \{(y,z) \mid y \geq 0, z \geq 0, y+z \leq 1-x\}$

$$I = \int_0^1 dx \iint_{D(x)} (1+x+y+z)^{-3}\,dy\,dz = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} (1+x+y+z)^{-3}\,dz$$

Una primitiva di $(1+x+y+z)^{-3}$ nella variabile z è

$$-\frac{1}{2(1+x+y+z)^2}$$

quindi
$$\int_0^{1-x-y} (1+x+y+z)^{-3}\,dz = -\frac{1}{8} + \frac{1}{2(1+x+y)^2}$$

Una primitiva di $-\frac{1}{8} + \frac{1}{2(1+x+y)^2}$ nella variabile y è

$$-\frac{1}{8}y - \frac{1}{2(1+x+y)}$$

quindi
$$\int_0^{1-x} \left(-\frac{1}{8}y - \frac{1}{2(1+x+y)}\right) dy = \frac{x-1}{8} + \frac{1}{2(x+1)} - \frac{1}{4} = \frac{x}{8} + \frac{1}{2(x+1)} - \frac{3}{8}$$

Una primitiva di $\frac{x}{8} + \frac{1}{2(x+1)} - \frac{3}{8}$ nella variabile x è

$$\frac{1}{16}x^2 - \frac{3}{8}x + \frac{1}{2}\log|x+1|$$

quindi
$$I = \int_0^1 \left(\frac{1}{16}x^2 - \frac{3}{8}x + \frac{1}{2}\log(x+1)\right) dx = \frac{1}{16} - \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\log 2 = \frac{\log 2}{2} - \frac{5}{16}$$

3) Qui a, b e c sono i semiassi, quindi costanti positive. $D = \{(x,y,z) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1\}$. Cambiamo coordinate, ponendo $u = x/a$, $v = y/b$, $w = z/c$, quindi

$$\begin{cases} x = au \\ y = bv \\ z = cw \end{cases}$$

Lo Jacobiano è abc che dunque è positivo. Otteniamo

$$I = \iiint_D \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right) dx\, dy\, dz = \iiint_S \left(u^2 + v^2 + w^2 \right) abc\, du\, dv\, dw$$

dove $S = \{(u, v, w) \mid u^2 + v^2 + w^2 \leq 1\}$. Per calcolare $\iiint_S \left(u^2 + v^2 + w^2 \right) abc\, du\, dv\, dw$ passiamo a coordinate sferiche:

$$\begin{cases} u = r \sin\varphi \cos\vartheta \\ v = r \sin\varphi \sin\vartheta \\ w = r \cos\varphi \end{cases}$$

$du\, dv\, dw = r^2 \sin\varphi\, dr\, d\varphi\, d\vartheta$. Quindi

$$I = abc \iiint_S \left(u^2 + v^2 + w^2 \right)\, du\, dv\, dw = abc \iiint_T r^2 r^2 \sin\varphi\, dr\, d\varphi\, d\vartheta$$

dove $T = \{(r, \varphi, \vartheta) \mid 0 \leq r \leq 1,\, 0 \leq \varphi \leq \pi,\, 0 \leq \vartheta \leq 2\pi\}$. Quindi

$$I = abc \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^1 r^4 \sin\varphi\, dr = [\vartheta]_0^{2\pi}\ [-\cos\vartheta]_0^{\pi} \left[\frac{1}{5} r^5 \right]_0^1 = \frac{4}{5}\, \pi$$

4) Vista la simmetria del dominio rispetto al piano $z = 0$ e il fatto che $f(x, y, z) = f(x, y, -z)$, l'integrale richiesto è il doppio di

$$J = \iiint_T \sqrt{x^2 + y^2}\, dx\, dy\, dz$$

dove $T = \{(x, y, z) \mid 0 \leq z \leq 1,\, x^2 + y^2 \leq z^2\}$. Utilizzando coordinate cilindriche (R, ϑ, z)

$$\begin{cases} x = R \cos\vartheta \\ y = R \sin\vartheta \\ z = z \end{cases}$$

$dV = R\, dR\, d\vartheta\, dz$

Otteniamo

$$J = \iiint_S RR\, dR\, d\vartheta\, dz$$

dove $S = \{(R, \vartheta, z) \mid 0 \leq z \leq 1,\, 0 \leq R \leq z,\, 0 \leq \vartheta \leq 2\pi\}$, essendo $\sqrt{x^2 + y^2} = R$, $dV = R\, dR\, d\vartheta\, dz$. Quindi

$$J = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^1 dz \int_0^z R^2\, dR$$

Ora

$$\int_0^z R^2\, dR = \left[\frac{1}{3} R^3 \right]_0^z = \frac{1}{3} z^3$$

$$\int_0^1 dz \int_0^z R^2\, dR = \int_0^1 \frac{1}{3} z^3\, dz = \frac{1}{3} \left[\frac{1}{4} z^4 \right]_0^1 = \frac{1}{12}$$

$$J = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^1 dz \int_0^z R^2\, dR = \int_0^{2\pi} \frac{1}{12}\, d\vartheta = \frac{1}{12}\, [\vartheta]_0^{2\pi} = \frac{1}{12} 2\pi = \frac{1}{6}\pi$$

L'integrale richiesto vale $\frac{1}{3}\pi$. □

ESERCIZIO 7. Calcolare la massa del solido compreso tra le superfici sferiche concentriche di raggio rispettivamente a, b, con $0 < a < b$, se la densità in ogni punto è uguale al quadrato della distanza di questo punto dal centro.

SOLUZIONE.

Poniamo $D = \{(x, y, z) \mid a^2 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq b^2\}$. Dobbiamo calcolare

$$I = \iiint_D \left(x^2 + y^2 + z^2\right)\, dx\, dy\, dz =$$

Passiamo a coordinate sferiche:

$$\begin{cases} x = r \sin\varphi \cos\vartheta \\ y = r \sin\varphi \sin\vartheta \\ z = r \cos\varphi \end{cases}$$

$dx\, dy\, dz = r^2 \sin\varphi\, dr\, d\varphi\, d\vartheta$, $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$. Quindi

$$I = \iiint_S r^2 r^2 \sin\varphi\, dr\, d\varphi\, d\vartheta$$

dove $S = \{(r, \varphi, \vartheta) \mid a \leq r \leq b,\ 0 \leq \varphi \leq \pi,\ 0 \leq \vartheta \leq 2\pi\}$. Quindi

$$I = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{\pi} d\varphi \int_a^b r^4 \sin\varphi\, dr = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{\pi} \sin\varphi\, d\varphi \int_a^b r^4\, dr$$

$$I = [\vartheta]_0^{2\pi}\ [-\cos\vartheta]_0^{\pi}\ \left[\frac{1}{5} r^5\right]_a^b = (2\pi - 0)(1 + 1)\left(\frac{1}{5} b^5 - \frac{1}{5} a^5\right) = \frac{4}{5}\,\pi(b^5 - a^5)$$

□

ESERCIZIO 8. Sia S la parte superiore della superficie conica $x^2 + y^2 = z^2$ interna al cilindro $x^2 + y^2 = 2x$. Calcolare il valore dell'integrale superficiale

$$\iint_S (x^4 - y^4 + y^2 z^2 - z^2 x^2 + 1)\, dS \quad .$$

SOLUZIONE.

Poniamo $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 - 2x \leq 0\}$, quindi D è la base del cilindro. L'equazione $x^2 + y^2 = 2x$ si può scrivere come $(x - 1)^2 + y^2 = 1$, quindi si tratta di un cerchio di centro $(1, 0)$ e raggio

1. La superficie S è costituita dai punti (x, y, z) per cui $(x-1)^2 + y^2 \leq 1$ e $z = g(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$. Calcoliamo l'elemento infinitesimo di superficie dS. Si ha

$$g_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad g_y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

quindi

$$dS = \sqrt{1 + g_x^2 + g_y^2}\; dx\; dy = \sqrt{2}\, dx\, dy \quad .$$

Per calcolare l'integrale richiesto, osserviamo che su S si ha $z^2 = x^2 + y^2$, quindi $x^4 - y^4 + y^2z^2 - z^2x^2 + 1 = x^4 - y^4 + y^2(x^2 + y^2) - (x^2 + y^2)x^2 + 1 = 1$, quindi

$$I = \iint_S (x^4 - y^4 + y^2z^2 - z^2x^2 + 1)\, dS = \iint_D \sqrt{2}\, dx\, dy$$

Ma $\iint_D \, dx\, dy$ è l'area di D, che vale π, quindi $I = \pi\sqrt{2}$. □

ESERCIZIO 9. Trovare il momento d'inerzia rispetto all'asse delle y della curva $\mathcal{C}$ di equazioni parametriche $x = e^t$, $y = \sqrt{2}t$, $z = e^{-t}$, con $0 \leq t \leq 1$. Si tratta cioè di calcolare

$$\int_{\mathcal{C}} (x^2 + z^2)\, ds \quad .$$

SOLUZIONE.

Calcoliamo l'elemento infinitesimo di lunghezza ds. Si ha $x'(t) = e^t$, $y'(t) = \sqrt{2}$, $z'(t) = -e^{-t}$

$$ds = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}\, dt = \sqrt{e^{2t} + 2 + e^{-2t}}\, dt = (e^t + e^{-t})\, dt \;\; ,$$

in quanto

$$e^{2t} + 2 + e^{-2t} = (e^t + e^{-t})^2$$

ed $e^t + e^{-t}$ è sempre positivo. Quindi

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{C}} (x^2 + z^2)\, ds &= \int_0^1 (e^{2t} + e^{-2t})(e^t + e^{-t})\, dt = \int_0^1 (e^{3t} + e^{-t} + e^t + e^{-3t})\, dt = \\ &= \left[\frac{1}{3}e^{3t} - e^{-t} + e^t - \frac{1}{3}e^{-3t}\right]_0^1 = \left(\frac{1}{3}e^3 - e^{-1} + e - \frac{1}{3}e^{-3}\right) - \left(\frac{1}{3} - 1 + 1 - \frac{1}{3}\right) = \\ &= \frac{1}{3}e^3 - e^{-1} + e - \frac{1}{3}e^{-3}\end{aligned}$$

□