Istituzioni di Matematiche 2

corso di laurea in Scienze Geologiche.

Mauro Costantini

Qualche richiamo

Definizione 0.1. Due rette $r = P + \langle \mathbf{v} \rangle$, $s = Q + \langle \mathbf{w} \rangle$ dello spazio sono ortogonali (o perpendicolari) se i vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ sono tra loro ortogonali, cioe' se $\mathbf{v} \circ \mathbf{w} = 0$.

Quindi dalla definizione segue che *non si richiede* che le due rette siano incidenti.

Esempio 0.1. Le rette $r = P + \langle \mathbf{i} \rangle$, $s = Q + \langle \mathbf{j} \rangle$, con $P = (0, 0, 0)$, $Q = (0, 0, 1)$ sono perpendicolari, ma $r \cap s = \emptyset$, in quanto

$$r : \begin{cases} x = & t \\ y = & 0 \\ z = & 0 \end{cases} \quad , \quad s : \begin{cases} x = & 0 \\ y = & t \\ z = & 1 \end{cases}$$

al variare di t in $\mathbb{R}$. Allora $r \cap s$ e' data dal sistema

$$\begin{cases} t = 0 \\ 0 = t' \\ 0 = 1 \end{cases}$$

in t, t', sistema che non ha soluzione ($0 = 1$ non ha soluzioni).

N.B. Scrivo i vettori e i punti in colonna o in riga a seconda della convenienza.

• Guardare la definizione di prodotto di matrici. In questo modo un sistema lineare

$$\Sigma : \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n & = b_1 \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n & = b_m \end{cases}$$

si scrive in modo compatto

$$\Sigma : Ax = b$$

dove

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad , \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad , \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

• Consideriamo il sistema lineare omogeneo

$$\Sigma : \begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 & = 0 \\ b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 & = 0 \end{cases}$$

Supponiamo che $\operatorname{rk} A = \left(\begin{smallmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{smallmatrix}\right) = 2$, cioe' almeno uno dei minori 2×2 sia non nullo. Allora l'insieme delle soluzioni S di Σ e'

$$S = \{\rho v \mid \rho \in \mathbb{R}\}$$

dove v e' una qualunque soluzione non nulla di Σ. Un tale v puo' essere scelto prendendo i minori 2×2 con segno di A. I tre minori in questione sono

$$A_1 = a_2 b_3 - a_3 b_2 \quad , \quad A_2 = a_1 b_3 - a_3 b_1 \quad , \quad A_3 = a_1 b_2 - a_2 b_1,$$

e quindi

$$v = (A_1, -A_2, A_3).$$

Questo non ci stupisce, poiche', posto $\mathbf{v} = (a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{w} = (b_1, b_2, b_3)$, noi sappiamo che il vettore $\mathbf{z} = \mathbf{v} \times \mathbf{w}$ e' ortogonale ad entrambi $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$. Ma dire $\mathbf{v} \circ \mathbf{z} = \mathbf{w} \circ \mathbf{z} = 0$ vuol proprio dire che $\mathbf{z}$ e' una soluzione di Σ. Infine, sappiamo che $\mathbf{z}$ e' proprio $(A_1, -A_2, A_3)$.

• Il discorso precedente ha anche la seguente applicazione. Sia s una retta dello spazio:

$$s : \begin{cases} a_1 x + a_2 y + a_3 z & = a \\ b_1 x + b_2 y + b_3 z & = b \end{cases} .$$

Stiamo quindi implicitamente assumendo che $\operatorname{rk} A = \left(\begin{smallmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{smallmatrix}\right) = 2$, come prima. Vogliamo calcolare un vettore non nullo $\mathbf{v}$ parallelo ad s. Consideriamo i piani $\pi_1 : a_1 x + a_2 y + a_3 z = a$, $\pi_2 : b_1 x + b_2 y + b_3 z = b$. Allora un vettore ortogonale a π_1 e' $\mathbf{n}_1 = (a_1, a_2, a_3)$, un vettore ortogonale a π_2 e' $\mathbf{n}_2 = (b_1, b_2, b_3)$. Un vettore richiesto e' un (qualunque multiplo non nullo di) $\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = (A_1, -A_2, A_3)$. Tutto cio' si puo' allora anche interpretare nel seguente modo. Un vettore un vettore non nullo $\mathbf{v}$ parallelo ad s si puo' ottenere cercando una soluzione non nulla del sistema omogeneo associato al sistema di s, cioe' del sistema

$$s : \begin{cases} a_1 x + a_2 y + a_3 z & = 0 \\ b_1 x + b_2 y + b_3 z & = 0 \end{cases} .$$

Ovviamente, in concreto, si tratta sempre di calcolare i tre minori con segno di A.

Esempio 0.2. Nello spazio sia s la retta di equazioni

$$s : \begin{cases} 3x - 2y - 2z & = 14 \\ x - y - 3z & = 224 \end{cases} .$$

Cerchiamo la direzione di s, cioe' un vettore non nullo $\mathbf{w}$ parallelo ad s. Le coordinate di $\mathbf{w}$ sono una soluzione non nulla di $\begin{cases} 3x - 2y - 2z & = 0 \\ x - y - 3z & = 0 \end{cases}$.

Considerando i minori con segno della matrice

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix},$$

troviamo il vettore

$$(4, 7, -1),$$

quindi possiamo prendere

$$\mathbf{w} = (4, 7, -1)$$

o un qualsiasi suo multiplo non nullo. #

- Equazioni parametriche e cartesiane di una retta nello spazio.
- Piano passante per una retta e un punto.
- Piano passante per una retta e parallelo ad un vettore.

Esempio 0.3. Determinare il piano che contiene la retta

$$r : \begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 2x - y + z = 3 \end{cases}$$

e parallelo al vettore $\mathbf{v} = (1, 1, 14)$.

Soluzione. Il piano richiesto e' nel fascio di piani per r. Questo fascio ha equazione

$$\mathcal{F} : \lambda(x + 2y + z - 1) + \mu(2x - y + z - 3) = 0$$

Raccogliendo otteniamo

$$\mathcal{F} : (\lambda + 2\mu)x + (2\lambda - \mu)y + (\lambda + \mu)z - \lambda - 3\mu = 0$$

Un vettore ortogonale al piano $\pi_{\lambda,\mu} : (\lambda + 2\mu)x + (2\lambda - \mu)y + (\lambda + \mu)z - \lambda - 3\mu = 0$ e' il vettore

$$\mathbf{n}_{\lambda,\mu} = (\lambda + 2\mu, 2\lambda - \mu, \lambda + \mu).$$

Dobbiamo allora trovare una coppia (λ, μ) tale che $\mathbf{n}_{\lambda,\mu} \perp \mathbf{v}$, poiche' questo e' proprio equivalente ad imporre che $\pi_{\lambda,\mu}$ sia parallelo a $\mathbf{v}$. Allora $\mathbf{n}_{\lambda,\mu} \circ \mathbf{v} = 0$ vuol dire

$$(\lambda + 2\mu, 2\lambda - \mu, \lambda + \mu) \circ (1, 1, 14) = 0$$

cioe' $\lambda + 2\mu + 2\lambda - \mu + 14(\lambda + \mu) = 0$, e quindi $17\lambda + 15\mu = 0$. Possiamo prendere $\lambda = 15$, $\mu = -17$. Il piano richiesto e'

$$\pi = \pi_{15,-17} = 15(x + 2y + z - 1) - 17(2x - y + z - 3) = 0$$

cioe' $\pi : -4x + 47y - 2z + 36 = 0$.

Alternativamente si puo' procedere cosi': si ha $\pi_{\lambda,\mu} : \lambda(x + 2y + z - 1) + \mu(2x + -y + z - 3) = 0$. Consideriamo l'*equazione omogenea associata*:

$$(*) \qquad \lambda(x + 2y + z) + \mu(2x - y + z) = 0.$$

Questa rappresenta il piano $\alpha_{\lambda,\mu}$ parallelo a $\pi_{\lambda,\mu}$ e passante per l'origine. A questo punto imporre il parallelismo di $\mathbf{v}$ con $\pi_{\lambda,\mu}$ equivale al imporre che $\mathbf{v}$ (pensato applicato all'origine), sia contenuto in $\alpha_{\lambda,\mu}$. Allora basta sostituire in $(*)$ le coordinate di $\mathbf{v}$ e risolvere l'equazione in λ, μ. facendo il conto:

$$\lambda(1 + 2 + 14) + \mu(2 - 1 + 14) = 0$$

porge $17\lambda + 15\mu = 0$, e si conclude come prima. #

- Nello spazio, dato un punto $P = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ e un vettore $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, allora $P + \mathbf{v}$ e' il punto

$$P + \mathbf{v} = \begin{pmatrix} x_0+a \\ y_0+b \\ z_0+c \end{pmatrix}.$$

Analogamente, nel piano, dato un punto $P = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ e un vettore $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, allora $P + \mathbf{v}$ e' il punto

$$P + \mathbf{v} = \begin{pmatrix} x_0+a \\ y_0+b \end{pmatrix}.$$

Esempi:

$$P = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad P + \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

• Retta r nello spazio per P, di direzione $\mathbf{v}$ (o parallela a $\mathbf{v}$): $r = P + \langle \mathbf{v} \rangle = \{P + t\mathbf{v} \mid t \in \mathbb{R}\}$. Qui ovviamente assumiamo $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, altrimenti non troviamo una retta, ma un punto. Esempio.

$$P = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad r = \left\{ \begin{pmatrix} 1+4t \\ 2+5t \\ 3+6t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Analogamente nel piano: retta r nel piano per P, di direzione $\mathbf{v}$: $r = P + \langle \mathbf{v} \rangle = \{P + t\mathbf{v} \mid t \in \mathbb{R}\}$. Qui ovviamente assumiamo $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, altrimenti non troviamo una retta, ma un punto. Esempio.

$$P = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad r = \left\{ \begin{pmatrix} 1+4t \\ 2+5t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}.$$

• Due vettori $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ si dicono paralleli (e scriviamo $\mathbf{v} \parallel \mathbf{w}$) se almeno uno dei due e' multiplo dell'altro. Tre vettori si dicono complanari se, una volta applicati all'origine, giacciono sullo stesso piano. Esempi nel piano:

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{non sono paralleli,}$$

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{non sono paralleli,}$$

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{sono paralleli,}$$

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad \text{sono paralleli per ogni } a,\ b.$$

In generale,

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$$

sono paralleli se e solo se

$$\det \begin{pmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{pmatrix} = v_1 w_2 - v_2 w_1 = 0.$$

Nello spazio.

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{non sono paralleli,}$$

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{non sono paralleli,}$$

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix} \quad \text{sono paralleli,}$$

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix} \quad \text{sono paralleli,}$$

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad \text{sono paralleli per ogni } a,\ b,\ c.$$

In generale,

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$$

sono paralleli se e solo se

$$\operatorname{rk} \begin{pmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \\ v_3 & w_3 \end{pmatrix} \leq 1,$$

cioe' se e solo se

$$\det \begin{pmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} v_1 & w_1 \\ v_3 & w_3 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} v_2 & w_2 \\ v_3 & w_3 \end{pmatrix} = 0.$$

Esempi di vettori complanari. Nel piano la discussione e' banale: poiche' c'e' un solo piano, tre vettori del piano sono sempre complanari. Diversa e' la situazione nello spazio. Avendo introdotto il prodotto vettoriale, e' chiaro che tre vettori $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ sono complanari se e solo se il prodotto misto $\mathbf{u} \circ (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \mathbf{0}$ (si costruisca il parallelepipedo di vertice l'origine e lati $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$: e' chiaro che i tre vettori sono complanari se e solo se il volume e' zero). Quindi

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$$

sono complanari se e solo se

$$\det \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{pmatrix} = 0.$$

Esempi:

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \ , \ \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \ , \ \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ non sono complanari poiche' } \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \neq 0.$$

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \ , \ \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix} \ , \ \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{sono complanari poiche'} \quad \det \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 8 & 5 \\ 3 & 7 & 4 \end{pmatrix} = 0.$$

• Fascio proprio di rette nel piano. Siano r, r' due rette non parallele del piano, e supponiamo $r \cap r' = \{P\}$. Allora, se $r : ax + by = c$ e $r' : a'x + b'y = c'$, l'equazione del fascio e'

$$\mathcal{F} : \lambda(ax + by - c) + \mu(a'x + b'y - c') = 0,$$

dove λ, $\mu \in \mathbb{R}$ non sono entrambi nulli.

Ricordo che poiche' stiamo assumendo che r ed r' siano rette, sicuramente almeno uno tra a e b e' non nullo, ed almeno uno tra a' e b' e' non nullo. Aggiungo anche che dire r ed r' non parallele equivale a dire

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} \neq 0.$$

Esempi: determinare la retta passante per $Q = \binom{1}{2}$ e per l'intersezione delle rette $r : x + 2y = 1$, $r' : x - 3y = 4$. La retta richiesta e' nel fascio per il punto d'intersezione tra r ed r'. Si ha

$$\mathcal{F} : \lambda(x + 2y - 1) + \mu(x - 3y - 4) = 0,$$

dove λ, $\mu \in \mathbb{R}$ non sono entrambi nulli. Imponendo il passaggio per Q si ottiene:

$$\mathcal{F} : \lambda(1 + 4 - 1) + \mu(1 - 6 - 4) = 0,$$

cioe' $4\lambda - 9\mu = 0$. Possiamo prendere $\lambda = 9$, $\mu = 4$, ed ottenere la retta richiesta

$$9(x + 2y - 1) + 4(x - 3y - 4) = 0,$$

$9x + 18y - 9 + 4x - 12y - 16 = 0$, ed infine $13x + 6y = 25$. #

ESEMPIO 1.4. Sia $f(x,y) = ye^{-xy}$ ed $\mathcal{S}$ la superficie di equazione $z = f(x,y)$.

(a) Scrivere l'equazione del piano tangente ad $\mathcal{S}$ nel punto $(2,5,f(2,5))$.

(b) Scrivere l'equazione della retta tangente alla curva di livello passante per il punto $P = (2,5)$ nel punto P.

(c) Calcolare la rapidità di variazione di f nel punto P nella direzione del vettore $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$.

SOLUZIONE. Calcoliamo le derivate parziali. Si ha $f_x(x,y) = -y^2e^{-xy}$, $f_y(x,y) = e^{-xy} - xye^{-xy} = (1-xy)e^{-xy}$. Il gradiente in (x,y) e'

$$(\nabla f)(x,y) = f_x(x,y)\mathbf{i} + f_y(x,y)\mathbf{j} = -y^2e^{-xy}\mathbf{i} + (1-xy)e^{-xy}\mathbf{j}.$$

Calcolando in P si ha $(\nabla f)(P) = -(25\mathbf{i} + 9\mathbf{j})e^{-10}$. Un vettore normale alla superficie in $(P, f(P))$e'

$$\mathbf{n} = f_x(P)\mathbf{i} + f_y(P)\mathbf{j} - \mathbf{k} = -(25\mathbf{i} + 9\mathbf{j})e^{-10} - \mathbf{k} = (-25e^{-10}, -9e^{-10}, -1).$$

L'equazione del piano tangente π ad $\mathcal{S}$ nel punto $(2,5,f(2,5))$ e'

$$(-25e^{-10}, -9e^{-10}, -1) \circ (x-2, y-5, z-f(P)) = 0$$

Essendo $f(P) = 5e^{-10}$, si ha

$$\pi : -\frac{100 + 25x + 9y}{e^{10}} - z = 0$$

e semplificando

$$\pi : 25x + 9y + e^{10}z = 100.$$

La retta r tangente alla curva di livello passante per il punto $P = (2,5)$ nel punto P e' la retta passante per P ed ortogonale a $(\nabla f)(P)$. L'equazione di r e'

$$(-25e^{-10}, -9e^{-10}) \circ (x-2, y-5) = 0.$$

Si ha

$$r : -\frac{95 - 25x - 9y}{e^{10}} = 0$$

e semplificando

$$r : 25x + 9y = 95.$$

Poniamo $\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{4+9}} = \frac{1}{\sqrt{13}}\mathbf{v}$. La rapidità di variazione di f nel punto P nella direzione del vettore $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ e' $D_{\mathbf{u}}(P) = (\nabla f)(P) \circ \mathbf{u} = -\frac{77}{\sqrt{13}}e^{-10}$. #

Esempio 1.5. Sia $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = x^4 - x^2 + y^4 - y^2$$

per ogni (x, y) in $\mathbb{R}^2$.

(a) Determinare i punti di massimo e minimo relativi e i punti di sella.

(b) Determinare il massimo ed il minimo assoluti di f nella regione di piano

$$T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0,\ y \geq 0,\ x + y \leq 3\}.$$

Soluzione. (a) La funzione e' differenziabile ovunque, perche' polinomiale. Calcoliamo le derivate parziali che ci servono:

$$f_x = -2x + 4x^3,\ f_y = -2y + 4y^3,\ f_{xx} = -2 + 12x^2,\ f_{yy} = -2 + 12y^2,\ f_{xy} = 0$$

Cerchiamo i punti critici:

$$\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} -2x + 4x^3 = 0 \\ -2y + 4y^3 = 0 \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} x(2x^2 - 1) = 0 \\ y(2y^2 - 1) = 0 \end{cases}$$

Se $x \neq 0$, allora $x^2 = 1/2$. Se $y \neq 0$, allora $y^2 = 1/2$. Le soluzioni allora sono

$$\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

e queste sono 4. Poi c'e' $(0, 0)$, ed infine

$$\left(0, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \quad , \quad \left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$$

in tutto sono 9 soluzioni. Osservo che nel nostro caso $f(\pm x, \pm y) = f(x, y)$ (ovviamente non e' detto che ci sia sempre una simmetria di questo tipo, se non c'e', si studiano tutti i casi). Basta allora studiare i punti $P = (0, 0)$, $Q = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$, $R = (1/\sqrt{2}, 0)$ e $S = (0, 1/\sqrt{2})$. Introduciamo l'Hessiano

$$H(x,y) = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 144x^2y^2 - 24x^2 - 24y^2 + 4.$$

Si ha $H(P) = 4 > 0$, $f_{xx}(P) = -2$, quindi P e' di massimo relativo. Poi $H(Q) = 16 > 0$, $f_{xx}(Q) = 4$, quindi Q e' di minimo relativo, $H(R) = H(S) = -8$, quindi R ed S sono punti di sella.

(b) Per determinare il massimo ed il minimo assoluto su T (che esistono, in quanto f e' continua e T e' chiuso e limitato), dobbiamo studiare il comportamento di f sulla frontiera di T. Tale frontiera e' l'unione dei tre lati del triangolo. Cominciamo con $\sigma : t \mapsto P_t = (t, 0)$. Questa mappa descrive tutto l'asse delle x. Dobbiamo determinare l'intervallo di variazione di t. Dovra' essere $0 \leq t \leq 3$. Introduco allora $g(t) = f(P_t) = t^4 - t^2$. Ora $g'(t) = 4t^3 - 2t$, che si annulla per $t = 0, \pm 1/\sqrt{2}$. I casi da esaminare sono allora

$$t = 0,\ 1/\sqrt{2},\ 3$$

corrispondenti ai punti $(0, 0)$, $(1/\sqrt{2}, 0)$, $(3, 0)$.

Studiamo adesso il comportamento di f nel segmento contenuto sull'asse y. Qui considero $\tau : t \mapsto R_t = (0, t)$. Questa mappa descrive tutto l'asse delle y. Dobbiamo determinare l'intervallo di variazione di t. Dovra' essere $0 \leq t \leq 3$. Introduco allora $h(t) = f(R_t) = t^4 - t^2$. Ora $h'(t) = 4t^3 - 2t$, che si annulla per $t = 0, \pm 1/\sqrt{2}$. I casi da esaminare sono allora

$$t = 0,\ 1/\sqrt{2},\ 3$$

corrispondenti ai punti $(0, 0)$, $(0, 1/\sqrt{2})$, $(0, 3)$.

Studiamo infine il terzo lato (l'ipotenusa). La retta in questione e' $r : x + y = 3$. Consideriamo allora la parametrizzazione

$$r : \begin{cases} x = t \\ y = 3 - x \end{cases}$$

al variare di t in $\mathbb{R}$, e quindi la mappa $\varphi : t \mapsto S_t = (t, 3 - t)$. Questa mappa descrive tutta la retta r. Dobbiamo determinare l'intervallo di variazione di t. Dovra' essere $0 \leq t \leq 3$. Introduco allora $k(t) = f(S_t) = t^4 - t^2 + (3 - t)^4 - (3 - t)^2$. Ora $k'(t) = 4t^3 - 2t - 4(3 - t)^3 + 2(3 - t)$, e non e' cosi' evidente trovarne gli zeri. Poiche' si tratta di un polinomio di grado dispari a coefficienti reali, sappiamo che almeno uno zero c'e'. Cerchiamo di trovarlo, cosi' poi dovremo studiare una equazione di grado 2. Dalla forma di $k(t)$ e' evidente che il grafico di $k(t)$ e' simmetrico rispetto l'asse $x = 3/2$ (questo equivale a dire che $k(\frac{3}{2} + t) = k(\frac{3}{2} - t)$, come si puo' facilmente verificare). Ma allora sicuramente per $x = 3/2$ c'e' un massimo o un minimo relativo, quindi in particolare $k'(3/2) = 0$. Siamo riusciti a trovare uno zero di $k'(t)$. Ma allora, il teorema di Ruffini ci dice che $k'(t)$ e' divisibile per $t - 3/2$, e facendo la divisione si trova

$$k'(t) = 4t^3 - 2t - 4(3-t)^3 + 2(3-t) = 2(4t^3 - 18t^2 + 52t - 51) = 4(t-3/2)(2t^2 - 6t + 17).$$

A questo punto, poiche' il discriminante di $2t^2 - 6t + 17$ vale

$$\Delta = b^2 - 4ac = 36 - 4 \cdot 2 \cdot 17 < 0,$$

concludiamo che $t = 3/2$ e' l'unico zero reale di $k'(t)$. I casi da esaminare sono allora

$$t = 0,\ 3/2,\ 3$$

corrispondenti ai punti $(0,3)$, $(3/2,3/2)$, $(3,0)$.

Riassumendo, possiamo affermare che il minimo ed il massimo di f su T vengono assunti in punti dell'insieme unione dei punti singolari interni a T (che nel nostro caso non sono presenti, perche' non ci sono punti singolari), punti critici interni a T, i punti individuati in precedenza sul bordo. Riassumendo, l'insieme dei punti da considerare e':

$$\{(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}), (0,0), (1/\sqrt{2}, 0), (3,0), (0, 1/\sqrt{2}), (0,3), (3/2, 3/2)\}.$$

Per concludere dobbiamo calcolare f su questi punti. Si ha

$$\begin{aligned} f(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}) &= -1/2, \\ f(0,0) &= 0, \\ f(1/\sqrt{2}, 0) &= -1/4, \\ f(3,0) &= 72, \\ f(0, 1/\sqrt{2}) &= -1/4, \\ f(0,3) &= 72, \\ f(3/2, 3/2) &= 45/8. \end{aligned}$$

Quindi il massimo assoluto su T e' 72 ed il minimo assoluto su T e' $-1/2$. #

N.B. Conviene fare sempre un disegno il piu' possibile preciso della regione da considerare (nel nostro caso T), e poi stabilire quali dei punti rilevanti incontrati nella discussione sono effettivamente nella regione (nell'esempio precedente, $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}) \in T$, poiche' $1/\sqrt{2} \geq 0$, $1/\sqrt{2} \geq 0$ e $1/\sqrt{2}+1/\sqrt{2} = \sqrt{2} \leq 3$). In generale occorre determinare tutti i punti critici (cioe' in cui f_x ed f_y esistono e sono entrambe nulle), e tutti i punti singolari (cioe' i punti in cui almeno una (o tutte e due) tra f_x ed f_y non esistono), ma poi bisogna considerare solo quelli interni alla regione. Poi infatti si analizza comunque tutto il bordo (utilizzando opportune parametrizzazioni).

Esempio 1.6. Si consideri la seguente equazione differenziale:

$$y'' + 4y' + 4y = e^x. \tag{$*$}$$

(a) Determinare la soluzione generale dell'equazione omogenea associata.
(b) Determinare la soluzione generale di $(*)$.
(c) Determinare la soluzione di $(*)$ che soddisfa la condizioni iniziali

$$y(0) = 0 \quad , \quad y'(0) = 0.$$

(d) Determinare la soluzione di $(*)$ che soddisfa la condizioni iniziali

$$y(1) = 0 \quad , \quad y'(1) = 0.$$

Soluzione. (a) L'equazione differenziale omogenea associata e'

$$y'' + 4y' + 4y = 0. \tag{\#}$$

L'equazione caratteristica e' $\lambda^2+4\lambda+4 = 0$, che ha la sola radice $\lambda = -2$ di molteplicita' 2. Sappiamo allora che le soluzioni di (#) sono tutte e sole del tipo

$$y = c_1e^{-2x} + c_2xe^{-2x}$$

al variare di c_1, c_2 in $\mathbb{R}$.

(b) In questo caso $R(x) = e^x$ e' prodotto di $e^{\mu x}$ e un polinomio di grado zero (ogni costante non nulla e' un polinomio di grado 0), dove $\mu = 1$. Cerco allora una soluzione del tipo

$$f(x) = ae^x$$

in quanto μ non e' radice dell'equazione caratteristica $\lambda^2+4\lambda+4=0$ (equivalentemente: la molteplicita' di 1 come zero di $\lambda^2+4\lambda+4=0$ e' zero). Facendo il conto si trova

$$f'(x) = ae^x \quad , \quad f''(x) = ae^x$$

e quindi

$$f'' + 4f' + 4f = (a + 4a + 4a)e^x$$

Imponendo

$$e^x = (a + 4a + 4a)e^x$$

otteniamo $a = \frac{1}{9}$. Una soluzione particolare di $(*)$ e' dunque

$$y = \frac{1}{9}e^x,$$

la soluzione generale e'

$$y = \frac{1}{9}e^x + c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x}$$

c_1, $c_2 \in \mathbb{R}$.

(c) Si tratta di determinare c_1, c_2 imponendo le condizioni iniziali. Ora da

$$0 = y(0) = \frac{1}{9}e^0 + c_1 e^0 + c_2 \cdot 0 \cdot e^0$$

segue

$$c_1 = -\frac{1}{9}$$

Ora $y' = \frac{1}{9}e^x - 2c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-2x} - 2c_2 x e^{-2x}$, quindi da

$$0 = y'(0) = \frac{1}{9}e^0 - 2c_1 e^0 + c_2 e^0$$

segue

$$c_2 = 2c_1 - \frac{1}{9} = -2\frac{1}{9} - \frac{1}{9} = -\frac{1}{3}.$$

La soluzione richiesta e'

$$y = \frac{1}{9}e^x - \frac{1}{9}e^{-2x} - \frac{1}{3}xe^{-2x}.$$

(d) Si tratta di determinare c_1, c_2 imponendo le condizioni iniziali. Ora da

$$0 = y(1) = \frac{1}{9}e^1 + c_1 e^{-2} + c_2 \cdot 1 \cdot e^{-2}$$

segue

$$c_1 + c_2 = -\frac{1}{9}e^3$$

Ora $y' = \frac{1}{9}e^x - 2c_1e^{-2x} + c_2e^{-2x} - 2c_2xe^{-2x}$, quindi da

$$0 = y'(1) = \frac{1}{9}e^1 - 2c_1e^{-2} + c_2e^{-2} - 2c_2e^{-2}$$

segue

$$2c_1 + c_2 = \frac{1}{9}e^3.$$

Si tratta quindi di risolvere il sistema

$$\begin{cases} c_1 + c_2 & = -\frac{1}{9}e^3 \\ 2c_1 + c_2 & = \frac{1}{9}e^3 \end{cases}$$

in c_1, c_2. Questo si risolve in un qualunque modo. Ad esempio, sottraendo si trova $c_1 = \frac{2}{9}e^3$, e quindi $c_2 = -\frac{1}{9}e^3 - \frac{2}{9}e^3 = -\frac{1}{3}e^3$. La soluzione richiesta e'

$$y = \frac{1}{9}e^x + \frac{2}{9}e^{3-2x} - \frac{1}{3}xe^{3-2x}.$$

#

Esempio 1.7. Si consideri la seguente equazione differenziale:

$$(*) \qquad y'' + 4y' + 4y = e^{-2x}.$$

(a) Determinare la soluzione generale dell'equazione omogenea associata.
(b) Determinare la soluzione generale di $(*)$.
(c) Determinare la soluzione di $(*)$ che soddisfa la condizioni iniziali

$$y(0) = 0 \quad , \quad y'(0) = 0.$$

(d) Determinare la soluzione di $(*)$ che soddisfa la condizioni iniziali

$$y(1) = 0 \quad , \quad y'(1) = 0.$$

Soluzione. (a) L'equazione differenziale omogenea associata e'

$$(\#) \qquad y'' + 4y' + 4y = 0.$$

L'equazione caratteristica e' $\lambda^2+4\lambda+4=0$, che ha la sola radice $\lambda=-2$ di molteplicita' 2. Sappiamo allora che le soluzioni di (#) sono tutte e sole del tipo

$$y = c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x}$$

al variare di c_1, c_2 in $\mathbb{R}$.

(b) In questo caso $R(x)=e^{-2x}$ e' prodotto di $e^{\mu x}$ e un polinomio di grado zero (ogni costante non nulla e' un polinomio di grado 0), dove $\mu=-2$. Cerco allora una soluzione del tipo

$$f(x) = ax^2 e^{-2x}$$

in quanto μ e' radice di molteplicita' 2 dell'equazione caratteristica $\lambda^2+4\lambda+4=0$. Facendo il conto si trova

$$f'(x) = (2\,a\,x - 2\,a\,x^2)e^{-2\,x} \quad , \quad f''(x) = (2\,a - 8\,a\,x + 4\,a\,x^2)e^{-2\,x}$$

e quindi

$$f'' + 4f' + 4f = 2\,ae^{-2\,x}.$$

Imponendo

$$e^{-2x} = 2\,ae^{-2\,x}$$

otteniamo $a=\frac{1}{2}$. Una soluzione particolare di $(*)$ e' dunque

$$y = \frac{1}{2}x^2 e^{-2x},$$

la soluzione generale e'

$$y = \frac{1}{2}x^2 e^{-2x} + c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x}$$

c_1, $c_2 \in \mathbb{R}$.

(c) Si tratta di determinare c_1, c_2 imponendo le condizioni iniziali. Ora da

$$0 = y(0) = \frac{1}{2}\cdot 0 \cdot e^0 + c_1 e^0 + c_2 \cdot 0 \cdot e^0$$

segue

$$c_1 = 0,$$

e imponendo $y'(0) = 0$ segue anche $c_2 = 0$ (verificarlo). La soluzione richiesta e'

$$y = \frac{1}{2}x^2e^{-2x}.$$

(d) Si tratta di determinare c_1, c_2 imponendo le condizioni iniziali. Procedendo come nell'esercizio precedente, si ottiene un sistema in c_1, c_2, risolto il quale si ottiene la soluzione

$$y = \frac{1}{2}x^2e^{-2x} + \frac{1}{2}e^{-2x} - xe^{-2x}.$$

#

Esempio 1.8. Si consideri la seguente equazione differenziale:

$$(*) \qquad y'' + 4y' + 4y = xe^x.$$

(a) Determinare la soluzione generale dell'equazione omogenea associata.
(b) Determinare la soluzione generale di $(*)$.
(c) Determinare la soluzione di $(*)$ che soddisfa la condizioni iniziali

$$y(0) = 0 \quad , \quad y'(0) = 0.$$

(d) Determinare la soluzione di $(*)$ che soddisfa la condizioni iniziali

$$y(1) = 0 \quad , \quad y'(1) = 0.$$

Soluzione. (a) L'equazione differenziale omogenea associata e'

$$(\#) \qquad y'' + 4y' + 4y = 0.$$

L'equazione caratteristica e' $\lambda^2+4\lambda+4 = 0$, che ha la sola radice $\lambda = -2$ di molteplicita' 2. Sappiamo allora che le soluzioni di $(\#)$ sono tutte e sole del tipo

$$y = c_1e^{-2x} + c_2xe^{-2x}$$

al variare di c_1, c_2 in $\mathbb{R}$.

(b) In questo caso $R(x) = xe^x$ e' prodotto di $e^{\mu x}$ e un polinomio di grado uno, dove $\mu = 1$. Cerco allora una soluzione del tipo

$$f(x) = (ax + b)e^x$$

in quanto μ non e' radice dell'equazione caratteristica $\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$. Facendo il conto si trova

$$f'(x) = (a + b + ax)e^x \quad , \quad f''(x) = (2a + b + ax)e^x$$

e quindi

$$f'' + 4f' + 4f = 3(2a + 3b + 3ax)e^x.$$

Imponendo

$$xe^x = 3(2a + 3b + 3ax)e^x$$

otteniamo $a = \frac{1}{9}$, $b = -\frac{2}{27}$. Una soluzione particolare di $(*)$ e' dunque

$$y = \left(\frac{1}{9}x - \frac{2}{27}\right)e^x,$$

la soluzione generale e'

$$y = \left(\frac{1}{9}x - \frac{2}{27}\right)e^x + c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x}$$

c_1, $c_2 \in \mathbb{R}$.

(c) Si tratta di determinare c_1, c_2 imponendo le condizioni iniziali. Facendo il conto si trova

$$y = \left(\frac{1}{9}x - \frac{2}{27}\right)e^x + \frac{2}{27}e^{-2x} + \frac{1}{9}xe^{-2x}.$$

(d) Si tratta di determinare c_1, c_2 imponendo le condizioni iniziali. Procedendo come nell'esempio precedente, si ottine un sistema in c_1, c_2, risolto il quale si ottiene la soluzione

$$y = \left(\frac{1}{9}x - \frac{2}{27}\right)e^x + \frac{5}{27}e^{3-2x} - \frac{2}{9}xe^{3-2x}.$$

#

Esempio 1.9. Si consideri la seguente equazione differenziale:

$$(*) \qquad y'' + 4y' + 4y = x^3 e^{-2x}.$$

(a) Determinare la soluzione generale dell'equazione omogenea associata.

(b) Determinare la soluzione generale di $(*)$.

(c) Determinare la soluzione di $(*)$ che soddisfa la condizioni iniziali

$$y(0) = 0 \quad , \quad y'(0) = 0.$$

(d) Determinare la soluzione di $(*)$ che soddisfa la condizioni iniziali

$$y(1) = 0 \quad , \quad y'(1) = 0.$$

Soluzione. (a) L'equazione differenziale omogenea associata e'

$$(\#) \qquad y'' + 4y' + 4y = 0.$$

L'equazione caratteristica e' $\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$, che ha la sola radice $\lambda = -2$ di molteplicita' 2. Sappiamo allora che le soluzioni di (#) sono tutte e sole del tipo

$$y = c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x}$$

al variare di c_1, c_2 in $\mathbb{R}$.

(b) In questo caso $R(x) = x^3 e^{-2x}$ e' prodotto di $e^{\mu x}$ e un polinomio di terzo grado, dove $\mu = -2$. Cerco allora una soluzione del tipo

$$f = x^2 \left(a + b\,x + c\,x^2 + d\,x^3\right) e^{-2\,x}$$

in quanto μ e' radice doppia dell'equazione caratteristica $\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$. Facendo il conto si trova

$$\begin{aligned} f' &= (2\,a\,x - 2\,a\,x^2 + 3\,b\,x^2 - 2\,b\,x^3 + 4\,c\,x^3 - 2\,c\,x^4 + 5\,d\,x^4 - 2\,d\,x^5)e^{-2\,x} \\ f'' &= (2\,a - 8\,a\,x + 6\,b\,x + 4\,a\,x^2 - 12\,b\,x^2 + 12\,c\,x^2 + \\ &\quad + 4\,b\,x^3 - 16\,c\,x^3 + 20\,d\,x^3 + 4\,c\,x^4 - 20\,d\,x^4 + 4\,d\,x^5)e^{-2\,x} \end{aligned}$$

e quindi

$$f'' + 4f' + 4f = (2\,a + 6\,b\,x + 12\,c\,x^2 + 20\,d\,x^3)e^{-2\,x}$$

Imponendo

$$x^3 e^{-2x} = (2\,a + 6\,b\,x + 12\,c\,x^2 + 20\,d\,x^3)e^{-2\,x}$$

otteniamo $a = b = c = 0$ e $d = \frac{1}{20}$. Una soluzione particolare di $(*)$ e' dunque

$$y = \frac{1}{20}x^5 e^{-2x}$$

la soluzione generale e'

$$y = \frac{1}{20}x^5 e^{-2x} + c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x}$$

$c_1,\, c_2 \in \mathbb{R}$.

(c) Si tratta di determinare c_1, c_2 imponendo le condizioni iniziali. Ora da $y(0) = 0$ segue

$$c_1 = 0,$$

e imponendo $y'(0) = 0$ segue anche $c_2 = 0$ (verificarlo). La soluzione richiesta e'

$$y = \frac{1}{2}x^5 e^{-2x}.$$

(d) Si tratta di determinare c_1, c_2 imponendo le condizioni iniziali. Procedendo come nell'esercizio precedente, si ottiene

$$f(1) = e^{-2}\left(\frac{1}{20} + c_1 + c_2\right) \quad , \quad f'(1) = e^{-2}\left(\frac{3}{20} - 2c_1 - c_2\right)$$

e si ottine il sistema in c_1, c_2,

$$\begin{cases} c_1 + c_2 & = -\frac{1}{20} \\ 2c_1 + c_2 & = \frac{3}{20} \end{cases}$$

risolto il quale si ottiene la soluzione

$$y = \frac{1}{20}x^5 e^{-2x} + \frac{1}{5}e^{-2x} - \frac{1}{4}x e^{-2x}.$$

#

Esempio 1.10. Si consideri la seguente equazione differenziale:

$$(*) \qquad y'' + 2y' = x^2.$$

(a) Determinare la soluzione generale dell'equazione omogenea associata.

(b) Determinare la soluzione generale di $(*)$.

(c) Determinare la soluzione di $(*)$ che soddisfa la condizioni iniziali

$$y(0) = 0 \quad , \quad y'(0) = 0.$$

(d) Determinare la soluzione di $(*)$ che soddisfa la condizioni iniziali

$$y(1) = 0 \quad , \quad y'(1) = 0.$$

Soluzione. *(a)* L'equazione differenziale omogenea associata e'

$$(\#) \qquad y'' + 2y' = 0.$$

L'equazione caratteristica e' $\lambda^2 + 2\lambda = 0$, che ha le radici $\lambda = -2$, $\lambda = 0$ ciascuna di molteplicità 1. Sappiamo allora che le soluzioni di $(\#)$ sono tutte e sole del tipo

$$y = c_1 e^{0x} + c_2 e^{-2x}$$

cioè

$$y = c_1 + c_2 e^{-2x}$$

al variare di c_1, c_2 in $\mathbb{R}$.

(b) In questo caso $R(x) = x^2$ e' prodotto di $e^{\mu x}$ e un polinomio di grado due, dove $\mu = 0$. Cerco allora una soluzione del tipo

$$f(x) = (ax^2 + bx + c)x$$

in quanto $\mu = 0$ e' radice di molteplicita' 1 dell'equazione caratteristica $\lambda^2 + 2 = 0$. Facendo il conto si trova

$$f'(x) = 3ax^2 + bx + c \quad , \quad f''(x) = 6ax + 2b$$

e quindi

$$f'' + 2f' = 6ax^2 + (4b + 6a)x + 2b + 2c$$

Imponendo

$$x^2 = 6ax^2 + (4b + 6a)x + 2b + 2c$$

otteniamo $a = \frac{1}{6}$, $b = -\frac{1}{4}$, $c = \frac{1}{4}$. Una soluzione particolare di $(*)$ è dunque

$$y = \left(\frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}\right) x,$$

la soluzione generale e'

$$y = \left(\frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}\right) x + c_1 + c_2 e^{-2x}$$

c_1, $c_2 \in \mathbb{R}$.

(c) Si tratta di determinare c_1, c_2 imponendo le condizioni iniziali. Ora da

$$0 = y(0) = c_1 + c_2$$

segue

$$c_1 + c_2 = 0$$

Infine da

$$0 = y'(1) = \frac{1}{4} - 2c_2$$

segue

$$c_2 = \frac{1}{8},$$

e quindi $c_1 = -\frac{1}{8}$. La soluzione richiesta e'

$$y = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}x - \frac{1}{8} + \frac{1}{8}e^{-2x}.$$

(d) Si tratta di determinare c_1, c_2 imponendo le condizioni iniziali. Procedendo come negli esempi precedenti si trova

$$y = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}x - \frac{7}{24} + \frac{1}{8}e^{2-2x}.$$

#

Esempio 1.11. Sia E is solido definito da

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq z,\ z \leq 2 - y\}.$$

Calcolare il volume di E.

Soluzione. Determiniamo il sottoinsieme D di $\mathbb{R}^2$ in cui variano le proiezioni (x,y) dei punti (x,y,z) di E. Da $x^2+y^2 \le z$, $z \le 2-y$, segue $x^2+y^2 \le 2-y$. Questo lo riscriviamo come $x^2+y^2+y \le 2$. Completando i quadrati, essendo $(y-a)^2 = y^2+a^2-2ay$, posso scrivere (con $a = -\frac{1}{2}$), $y^2+y = y^2+y+\frac{1}{4}-\frac{1}{4} = (y+\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}$, e quindi $x^2+y^2+y \le 2$ diventa $x^2+(y+\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} \le 2$, cioè $x^2+(y+\frac{1}{2})^2 \le \frac{9}{4}$. Si tratta quindi dei punti del cerchio D di centro $(0,-\frac{1}{2})$ e raggio $\frac{3}{2}$.

A questo punto il volume richiesto è

$$I = \iiint_V dx\,dy\,dz$$

che possiamo iterare nel seguente modo:

$$I = \int_{-2}^{1} dy \int_{-\sqrt{2-y-y^2}}^{\sqrt{2-y-y^2}} dx \int_{x^2+y^2}^{2-y} dz$$

o anche

$$I = 2\int_{-2}^{1} dy \int_{0}^{\sqrt{2-y-y^2}} dx \int_{x^2+y^2}^{2-y} dz$$

per questioni di simmetria.

Calcolando l'integrale interno otteniamo

$$I = \int_{-2}^{1} dy \int_{-\sqrt{2-y-y^2}}^{\sqrt{2-y-y^2}} (2-y-x^2-y^2)\,dx \tag{1}$$

Osserviamo che potevamo esprimere il volume di E come il volume del solido compreso tra i due grafici delle funzioni

$$f : D \to \mathbb{R} \quad , \quad (x,y) \to 2-y$$
$$g : D \to \mathbb{R} \quad , \quad (x,y) \to x^2+y^2$$

e quindi

$$I = \iint_D (2-y-x^2-y^2)dA = \int_{-2}^{1} dy \int_{-\sqrt{2-y-y^2}}^{\sqrt{2-y-y^2}} (2-y-x^2-y^2)\,dx$$

ovviamente trovando la formula di prima.

Si tratta adesso di calcolare I. Calcolare (1) in coordinate cartesiane non sembra cosi' comodo. Si puo' provare con coordinate polari (provare), ma anche cosi' facendo non si ottiene un integrale piu' comodo. Proviamo infine con il cambio di coordinate $x = r\cos\vartheta$, $y+\frac{1}{2} = r\sin\vartheta$, che è dettata dalla forma di D. Ovviamente bisogna ricordarsi di calcolare lo Jacobiano. Facendo il conto si trova

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\vartheta)} = \det\begin{pmatrix} \cos\vartheta & -r\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & r\cos\vartheta \end{pmatrix} = r$$

quindi $J = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\vartheta)}\right| = r$. Allora

$$2 - y - x^2 - y^2 = 2 - (y + x^2 + y^2) = 2 - (y + x^2 + y^2 + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}) = 2 - (r^2 - \frac{1}{4}) = \frac{9}{4} - r^2$$

e

$$I = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{3/2} \left(\frac{9}{4} - r^2\right) r\,dr = \int_0^{2\pi} d\vartheta \left[\frac{9}{4}\cdot\frac{1}{2}r^2 - \frac{1}{4}r^4\right]_0^{3/2} = 2\pi\frac{81}{64} = \frac{81}{32}\pi.$$

#

Esempio 1.12. Sia $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + (y-1)^2 \geq 1,\ x^2 + (y-2)^2 \leq 4\}$.

(a) Disegnare D.

(b) Calcolare:

$$I = \iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Soluzione. Fare bene il disegno di D. Vediamo se usando coordinate polari riusciamo a calcolare I. Poniamo dunque $x = r\cos\vartheta$, $y = r\sin\vartheta$. E' chiaro dal disegno che $0 \leq \vartheta \leq \pi$. Vediamo adesso invece l'intervallo in cui varia r una volta fissato ϑ. Sempre dal disegno risulta $2\sin\vartheta \leq r \leq 4\sin\vartheta$. Quindi (ricordarsi lo Jacobiano)

$$I = \int_0^{\pi} d\vartheta \int_{2\sin\vartheta}^{4\sin\vartheta} \frac{r}{r}\,dr = \int_0^{\pi} d\vartheta \int_{2\sin\vartheta}^{4\sin\vartheta} dr = \int_0^{\pi} d\vartheta(4\sin\vartheta - 2\sin\vartheta) = 4$$

#