A

Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ____________

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

1° appello — 14 giugno 2022

Esercizio 1. Sia $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la funzione lineare definita da

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \Big(2x_1 - x_2 - \frac{5}{2}\,x_3 + x_4,\ -x_1 + x_3 - \frac{1}{2}\,x_4,\ x_1 + x_2 - \frac{1}{2}\,x_3 + \frac{1}{2}\,x_4,\ 2x_2 + x_3\Big)$$

(a) Scrivere la matrice A di f rispetto alle basi canoniche.

(b) Calcolare il rango di A e trovare basi di $\mathrm{Ker}(f)$ e di $\mathrm{Im}(f)$.

(c) Trovare la dimensione e una base di $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f)$.

(d) Esiste una funzione lineare $g\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tale che $\mathrm{Ker}(g) = \mathrm{Im}(g)$? (*la risposta deve essere giustificata*)

Soluzione. (a) La matrice A è

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -5/2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1/2 \\ 1 & 1 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(b) Riducendo la matrice A in forma a scala si ottiene

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & -1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

da cui si deduce che A ha rango 2 e quindi $\dim(\mathrm{Im}\, f) = 2$. Una base dell'immagine di f è costituita dalle prime due colonne di A. Per trovare una base del nucleo di f basta risolvere il sistema

$$\begin{cases} -x_1 + x_3 - \dfrac{1}{2}\,x_4 = 0 \\ -x_2 - \dfrac{1}{2}\,x_3 = 0 \end{cases}$$

da cui si ricava

$$\begin{cases} x_1 = x_3 - \dfrac{1}{2}\,x_4 \\ x_2 = -\dfrac{1}{2}\,x_3 \end{cases}$$

Una base del nucleo di f è formata dai due vettori $u_1 = (1, -1/2, 1, 0)$ e $u_2 = (-1/2, 0, 0, 1)$.

(c) Si ha $\dim(\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f)) = 1$ e una base di $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f)$ è data dal vettore $2u_1 + 2u_2 = (1, -1, 2, 2)$ che è anche uguale alla somma delle prime due colonne di A.

(d) Dato che $\dim(\mathrm{Ker}\, g) + \dim(\mathrm{Im}\, g) = 4$, se vogliamo che $\mathrm{Ker}(g) = \mathrm{Im}(g)$ si deve avere $\dim(\mathrm{Ker}\, g) = \dim(\mathrm{Im}\, g) = 2$. Se indichiamo con e_1, e_2, e_3, e_4 i vettori della base canonica di $\mathbb{R}^4$ per costruire una tale funzione g basta porre $g(e_1) = 0$, $g(e_2) = 0$, $g(e_3) = e_1$, $g(e_4) = e_2$. In questo modo si ha $\mathrm{Ker}(g) = \langle e_1, e_2 \rangle$ e $\mathrm{Im}(g) = \langle e_1, e_2 \rangle$.

Esercizio 2. Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) Trovare una base del nucleo di A.

(b) Determinare il polinomio caratteristico e gli autovalori di A.

(c) Trovare le basi degli autospazi e dire se A è diagonalizzabile.

(d) Esiste una matrice **simmetrica** simile ad A? (*la risposta deve essere giustificata*)

Soluzione. (a) La matrice A ha rango 3, quindi il nucleo di A ha dimensione 1 e una sua base è data dal vettore $v_1 = (1, 0, 1, -1)$.

(b) Il polinomio caratteristico di A è $x(x-3)^3$ e gli autovalori sono 0 (con molteplicità 1) e 3 (con molteplicità 3).

(c) L'autospazio relativo all'autovalore 0 è il nucleo di A e una sua base è data dal vettore $v_1 = (1, 0, 1, -1)$ trovato prima.
L'autospazio relativo all'autovalore 3 ha dimensione 2 e una sua base è data dai vettori $v_2 = (1, 0, 0, 1)$ e $v_3 = (0, 0, 1, 1)$. Dato che la molteplicità geometrica (cioè la dimensione dell'autospazio) è diversa dalla molteplicità algebrica, la matrice A non è diagonalizzabile.

(d) No. Ricordiamo che una matrice simmetrica è sempre diagonalizzabile. Siccome A non è diagonalizzabile, nessuna matrice simmetrica può essere simile ad A.

Esercizio 3. Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^4$, dotato del prodotto scalare usuale, sia U il sottospazio generato dai vettori $u_1 = (1, 0, 2, -2)$, $u_2 = (0, 1, -4, 5)$.

(a) Trovare una base ortogonale di U.

(b) Scrivere le equazioni cartesiane di $U^\perp$ e trovare una sua base.

(c) Dato $v = (-1, 4, 0, 4) \in \mathbb{R}^4$ determinare la sua proiezione ortogonale su U.

(d) Si dica se esiste un sottospazio $W \subset \mathbb{R}^4$ tale che la proiezione ortogonale di v su W sia il vettore $w = (1, 1, -2, 0)$.

Soluzione. (a) Per trovare una base ortogonale di U utilizziamo il procedimento di Gram–Schmidt. Poniamo $u_1' = u_1$ e $u_2' = u_2 + \alpha u_1$. Richiedendo che $u_1' \cdot u_2' = 0$ si trova $\alpha = 2$ e quindi $u_2' = u_2 + 2u_1 = (2, 1, 0, 1)$. Una base ortogonale di U è formata dai vettori u_1' e u_2'.

(b) Un generico vettore $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in U^\perp$ deve essere ortogonale ai vettori u_1' e u_2' della base di U. Le equazioni cartesiane di $U^\perp$ sono quindi

$$U^\perp : \begin{cases} x_1 + 2x_3 - 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 0. \end{cases}$$

Da queste equazioni si ricava

$$\begin{cases} x_3 = -x_1/2 + x_4 \\ x_2 = -2x_1 - x_4 \end{cases}$$

e quindi una base di $U^\perp$ è formata dai vettori $(1, -2, -1/2, 0)$ e $(0, -1, 1, 1)$.

(c) Poniamo $v = v' + v''$, con $v' \in U$ e $v'' \in U^{\perp}$. Si ha $v' = \alpha_1 u_1' + \alpha_2 u_2' = (\alpha_1 + 2\alpha_2, \alpha_2, 2\alpha_1, -2\alpha_1 + \alpha_2)$ e $v'' = v - v' = (-1 - \alpha_1 - 2\alpha_2, 4 - \alpha_2, -2\alpha_1, 4 + 2\alpha_1 - \alpha_2)$. Il vettore $v'' \in U^{\perp}$ deve soddisfare le equazioni di $U^{\perp}$. Da queste equazioni si ricava $\alpha_1 = -1$ e $\alpha_2 = 1$. Quindi la proiezione ortogonale di v su U è il vettore $v' = (1, 1, -2, 3)$.

(d) Se esiste un tale sottospazio W poniamo $v = w + w''$, con $w \in W$ e $w'' \in W^{\perp}$. Si ha $w'' = v - w = (-2, 3, 2, 4)$ e questo vettore dovrebbe essere ortogonale al vettore $w = (1, 1, -2, 0) \in W$. Però si ha $w \cdot w'' = -3 \neq 0$, quindi w e w'' non sono ortogonali. Questo significa che non esiste alcun sottospazio W tale che la proiezione ortogonale di v su W sia il vettore w assegnato.

Esercizio 4. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ consideriamo i piani

$$\pi : 2x - y + z - 1 = 0, \qquad \sigma_\alpha : (\alpha + 2)x - 2y + \alpha z + \alpha = 0.$$

(a) Determinare il valore di α per cui i piani σ_α e π sono paralleli. Per tale valore di α calcolare la distanza tra i piani π e σ_α.

(b) Determinare il valore di α per cui le rette ortogonali al piano σ_α sono parallele al piano π.

(c) Poniamo $\alpha = 0$. Determinare un vettore direttore della retta $r = \pi \cap \sigma_0$.

(d) Poniamo $\alpha = 0$. Dato il punto $P = (1, 0, -1) \in \pi$ trovare un punto $S \in \sigma_0$ tale che la retta passante per P e S sia ortogonale a π.

Soluzione. (a) Un vettore ortogonale al piano π è $n_\pi = (2, -1, 1)$, mentre un vettore ortogonale a σ_α è $n_{\sigma_\alpha} = (\alpha + 2, -2, \alpha)$. I piani σ_α e π sono paralleli se e solo se $n_{\sigma_\alpha} = \lambda n_\pi$, da cui si ricava $\alpha = 2$. Per $\alpha = 2$ il piano diventa $\sigma_2 : 4x - 2y + 2z + 2 = 0$.
Prendiamo il punto $R = (0, 1, 0) \in \sigma_2$. Dato che i due piani sono paralleli, si ha:

$$\operatorname{dist}(\sigma_2, \pi) = \operatorname{dist}(R, \pi) = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

(b) Affinché le rette ortogonali al piano σ_α siano parallele al piano π i vettori $n_\pi = (2, -1, 1)$ e $n_{\sigma_\alpha} = (\alpha + 2, -2, \alpha)$ devono essere ortogonali. Richiedendo che $n_\pi \cdot n_{\sigma_\alpha} = 0$ si ottiene $\alpha = -2$.

(c) Per $\alpha = 0$ si ottiene il piano $\sigma_0 : 2x - 2y = 0$, il cui vettore normale è $n_0 = (2, -2, 0)$. Un vettore direttore della retta $r = \pi \cap \sigma_0$ è $v_r = n_\pi \times n_0 = (2, 2, -2)$.

(d) Consideriamo la retta passante per $P = (1, 0, -1)$ e ortogonale al piano π. Le sue equazioni parametriche sono

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -t \\ z = -1 + t \end{cases}$$

Intersecando tale retta con il piano σ_0 (cioè mettendo a sistema le equazioni della retta con l'equazione $2x - 2y = 0$ di σ_0) si trova il punto $S = (1/3, 1/3, -4/3)$. Questo è il punto cercato.