

Cognome \_\_\_\_\_ Nome \_\_\_\_\_ Matricola \_\_\_\_\_

## ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

**2° appello — 5 luglio 2022**

**Esercizio 1.** In  $\mathbb{R}^4$  sia  $U$  il sottospazio di equazione  $2x_1 - x_4 = 0$  e sia  $W$  il sottospazio generato dai vettori  $w_1 = (-1, 2, 1, 0)$  e  $w_2 = (1, 0, 0, 1)$ .

- (a) Scrivere una base di  $U$  e una base di  $U^\perp$ .
- (b) Trovare una base ortogonale di  $W$ .
- (c) Scrivere le equazioni cartesiane di  $W$  e trovare una base di  $U \cap W$ .
- (d) Dato  $v = (3, -1, 2, 1)$  determinare la sua proiezione ortogonale sul sottospazio  $U$ .

**Soluzione.** (a) Dall'equazione di  $U$  si ricava  $x_4 = 2x_1$ , per cui una base di  $U$  è formata dai vettori  $u_1 = (1, 0, 0, 2)$ ,  $u_2 = (0, 1, 0, 0)$ ,  $u_3 = (0, 0, 1, 0)$ . Dai coefficienti dell'equazione di  $U$  si ricava una base di  $U^\perp$ : essa è costituita dal vettore  $u^\perp = (2, 0, 0, -1)$ .

(b) Poniamo  $w'_1 = w_1$  e  $w'_2 = w_2 + \alpha w_1$ . Richiedendo che sia  $w'_1 \cdot w'_2 = 0$  si trova  $\alpha = 1/6$ , quindi  $w'_2 = w_2 + \frac{1}{6}w_1 = (5/6, 2/6, 1/6, 1)$ . I vettori  $w'_1$  e  $w'_2$  formano una base ortogonale di  $W$ .

(c) Le equazioni parametriche di  $W$  sono

$$\begin{cases} x_1 = -\alpha + \beta \\ x_2 = 2\alpha \\ x_3 = \alpha \\ x_4 = \beta \end{cases}$$

Eliminando i parametri  $\alpha$  e  $\beta$  si ottengono le seguenti equazioni cartesiane di  $W$ :

$$\begin{cases} x_1 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

Per trovare una base di  $U \cap W$  basta mettere a sistema l'equazione di  $U$  con le equazioni di  $W$ . Risolvendo il sistema si trova

$$\begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = 2x_3 \\ x_4 = 2x_3 \end{cases}$$

da cui si deduce che  $\dim(U \cap W) = 1$  e una base di  $U \cap W$  è data dal vettore  $(1, 2, 1, 2)$ .

(d) Scriviamo  $v = v' + v''$ , con  $v' \in U$  e  $v'' \in U^\perp$ . Dato che  $u^\perp$  è una base di  $U^\perp$  si deve avere  $v'' = \lambda u^\perp = (2\lambda, 0, 0, -\lambda)$ . Pertanto si ha  $v' = v - v'' = (3 - 2\lambda, -1, 2, 1 + \lambda)$ . Dato che  $v' \in U$  le sue coordinate devono soddisfare l'equazione di  $U$ . Da ciò si ricava  $\lambda = 1$  e quindi  $v' = (1, -1, 2, 2)$ .

**Esercizio 2.** Sia  $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$  la funzione lineare la cui matrice (rispetto alle basi canoniche) è

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -t \\ 1 & -2 & 0 & 3 \\ 4 & -4 & t & 5 \end{pmatrix}$$

- (a) Trovare una forma a scala di  $A$  e determinare il valore di  $t$  per cui  $\dim(\text{Ker } f) = 2$ .

- (b) Per il valore di  $t$  trovato al punto (a) si scriva una base di  $\text{Ker}(f)$  e una base di  $\text{Im}(f)$ .
- (c) Poniamo  $t = 0$ . Si scriva la matrice di  $f$  rispetto alla base di  $\mathbb{R}^4$  formata dai vettori  $v_1 = (1, 1, 1, 0)$ ,  $v_2 = (1, 1, 0, 1)$ ,  $v_3 = (1, 0, 1, 1)$ ,  $v_4 = (0, 1, 1, 1)$  e alla base canonica di  $\mathbb{R}^3$ .
- (d) Poniamo  $t = 0$ . È possibile trovare delle basi di  $\mathbb{R}^4$  e di  $\mathbb{R}^3$  rispetto alle quali la matrice di  $f$  abbia la prima riga uguale alla seconda riga? (la risposta deve essere motivata)

**Soluzione.** (a) Una forma a scala di  $A$  è

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 1 & -6-t \\ 0 & 0 & t-1 & t-1 \end{pmatrix}$$

quindi il rango di  $A$  è 3 se  $t \neq 1$ , mentre per  $t = 1$  il rango di  $A$  è 2. Richiedere che  $\dim(\text{Ker } f) = 2$  equivale a richiedere che  $\dim(\text{Im } f) = 2$ , cioè che il rango sia 2. Pertanto il valore cercato è  $t = 1$ .

(b) Per  $t = 1$  si ha  $\dim(\text{Im } f) = 2$ , quindi una base di  $\text{Im}(f)$  è formata da due colonne linearmente indipendenti di  $A$  (ad esempio, dalle prime due colonne).

Per  $t = 1$  la forma a scala di  $A$  è

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

quindi per trovare il nucleo di  $f$  basta risolvere il sistema

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_4 = 0 \\ 4x_2 + x_3 - 7x_4 = 0 \end{cases}$$

da cui si ricava

$$\begin{cases} x_1 = 2x_2 - 3x_4 \\ x_3 = -4x_2 + 7x_4 \end{cases}$$

Una base di  $\text{Ker}(f)$  è quindi formata dai vettori  $u_1 = (2, 1, -4, 0)$  e  $u_2 = (-3, 0, 7, 1)$ .

(c) Ponendo  $t = 0$  si ha

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 3 \\ 4 & -4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Si ha quindi:

$$f(v_1) = Av_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad f(v_2) = Av_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \quad f(v_3) = Av_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix} \quad f(v_4) = Av_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

pertanto la matrice di  $f$  cercata è

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 5 & 9 & 1 \end{pmatrix}$$

(d) La risposta è NO, non è possibile trovare delle basi di  $\mathbb{R}^4$  e di  $\mathbb{R}^3$  rispetto alle quali la matrice di  $f$  abbia la prima riga uguale alla seconda riga. Infatti una tale matrice avrebbe rango  $< 3$ , mentre per  $t = 0$  si ha  $\dim(\text{Im } f) = 3$ .

**Esercizio 3.** Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ t & 2 & t \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

- (a) Determinare il polinomio caratteristico e gli autovalori di  $A$ .
- (b) Determinare per quale valore di  $t$  la matrice è diagonalizzabile. Per tale valore di  $t$  trovare una matrice invertibile  $P$  tale che  $P^{-1}AP$  sia diagonale.
- (c) Si dica se la matrice  $B = A \cdot A^T$  è diagonalizzabile per ogni valore di  $t$  (*la risposta deve essere motivata e NON è necessario calcolare il prodotto  $A \cdot A^T$* )

**Soluzione.** (a) Si ha

$$\det \begin{pmatrix} 4 - \lambda & 0 & 4 \\ t & 2 - \lambda & t \\ -2 & 0 & -2 - \lambda \end{pmatrix} = -\lambda(\lambda - 2)^2$$

per cui gli autovalori sono  $\lambda = 0$  (con molteplicità 1) e  $\lambda = 2$  (con molteplicità 2).

(b) Gli autovettori corrispondenti a  $\lambda = 0$  sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} 4x + 4z = 0 \\ tx + 2y + tz = 0 \\ -2x - 2z = 0 \end{cases}$$

da cui si ricava

$$\begin{cases} x = -z \\ y = 0 \end{cases}$$

L'autospazio ha dimensione 1 ed è generato dal vettore  $v_1 = (1, 0, -1)$ .

Gli autovettori corrispondenti a  $\lambda = 2$  sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} 2x + 4z = 0 \\ tx + tz = 0 \end{cases}$$

Se  $t \neq 0$  questo autospazio ha dimensione 1 e quindi la matrice non è diagonalizzabile. Invece se  $t = 0$  il sistema si riduce alla sola equazione  $2x + 4z = 0$ , cioè  $x = -2z$ , quindi l'autospazio ha dimensione 2 e una sua base è formata dai vettori  $v_2 = (0, 1, 0)$  e  $v_3 = (-2, 0, 1)$ . In questo caso la matrice è diagonalizzabile.

La matrice  $P$  cercata è

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(c) Osserviamo che la matrice  $B$  è simmetrica, infatti si ha

$$B^T = (A \cdot A^T)^T = (A^T)^T \cdot A^T = A \cdot A^T = B.$$

Ora basta ricordare che ogni matrice simmetrica è diagonalizzabile per concludere che  $B$  è diagonalizzabile per ogni valore di  $t$ .

**Esercizio 4.** Nello spazio affine  $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$  consideriamo il piano  $\pi : x + 2y - z + 3 = 0$ .

- (a) Trovare il punto  $A' \in \pi$  di minima distanza da  $A = (3, 3, 0)$ .
- (b) Sia  $B = (0, -1, 1) \in \pi$ . Scrivere l'equazione del piano  $\sigma$  parallelo a  $\pi$  e passante per il punto medio del segmento  $AB$ .
- (c) Scrivere le equazioni parametriche della retta  $s$  contenuta nel piano  $\pi$ , passante per il punto  $B = (0, -1, 1)$  e tale che  $\text{dist}(A, s) = \text{dist}(A, B)$ .

- (d) Sia  $r_1$  la retta passante per il punto  $A$  e parallela al vettore  $w = (1, 1, 0)$ . Sia  $r_2$  la retta passante per il punto  $B$  e parallela a  $r_1$ . Calcolare la distanza  $\text{dist}(r_1, r_2)$ .

**Soluzione.** (a) Il punto  $A'$  è la proiezione ortogonale di  $A$  sul piano  $\pi$ . Un vettore ortogonale a  $\pi$  è  $n = (1, 2, -1)$  e la retta ortogonale a  $\pi$  passante per  $A$  ha equazioni

$$\begin{cases} x = 3 + t \\ y = 3 + 2t \\ z = -t \end{cases}$$

Intersecando questa retta con il piano  $\pi$  si trova il punto  $A' = (1, -1, 2)$ .

(b) Il punto medio del segmento  $AB$  è  $M = \frac{A+B}{2} = (3/2, 1, 1/2)$ . Dato che il piano  $\sigma$  è parallelo a  $\pi$ , la sua equazione è del tipo  $x + 2y - z + d = 0$ . Imponendo la condizione di passaggio per  $M$  si trova  $d = -3$ , quindi l'equazione del piano  $\sigma$  è  $x + 2y - z - 3 = 0$ .

(c) Indichiamo con  $v_s$  un vettore direttore della retta  $s$ . Richiedere che  $\text{dist}(A, s) = \text{dist}(A, B)$  equivale a richiedere che la retta  $s$  sia perpendicolare al segmento  $AB$  (cioè al vettore  $A - B$ ). Dato che la retta  $s$  deve essere contenuta nel piano  $\pi$  il suo vettore direttore  $v_s$  deve essere ortogonale al vettore  $n = (1, 2, -1)$ , quindi come vettore  $v_s$  possiamo prendere il prodotto vettoriale tra il vettore  $A - B = (3, 4, -1)$  e il vettore  $n = (1, 2, -1)$ :

$$v_s = (A - B) \times n = (-2, 2, 2).$$

Le equazioni parametriche della retta  $s$  sono quindi

$$\begin{cases} x = -2t \\ y = -1 + 2t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$$

(d) Dato che le rette  $r_1$  e  $r_2$  sono parallele, si ha  $\text{dist}(r_1, r_2) = \text{dist}(A, r_2)$ . Possiamo quindi usare la formula per la distanza di un punto da una retta:

$$\text{dist}(A, r_2) = \frac{\|(A - B) \times w\|}{\|w\|} = \frac{\|(1, -1, -1)\|}{\|w\|} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$