3° appello — 1 settembre 2022

Esercizio 1. Identifichiamo $\mathbb{R}^4$ con lo spazio vettoriale V dei polinomi di grado ≤ 3 associando a un vettore $v = (a_0, a_1, a_2, a_3)$ di $\mathbb{R}^4$ il polinomio $p_v(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3$.

(a) Sia $U \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio formato dai vettori $v \in \mathbb{R}^4$ tali che il polinomio $p_v(X)$ corrispondente si annulla per $X = 1$

$$U = \{ v \in \mathbb{R}^4 \mid p_v(1) = 0 \}.$$

Determinare la dimensione e una base di U.

(b) Sia $W \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio generato dai vettori $w_1 = (2, 0, 0, 1)$ e $w_2 = (1, 0, -2, 0)$. Verificare che per ogni $w \in W$ il corrispondente polinomio $p_w(X)$ è tale che la sua derivata si annulla per $X = 0$: $p'_w(0) = 0$.

Si dica se tutti i polinomi $f(X) \in V$ tali che $f'(0) = 0$ sono del tipo $f(X) = p_w(X)$, per qualche vettore $w \in W$.

(c) Determinare la dimensione e una base di $U \cap W$.

(d) Dire se esistono due sottospazi $V_1, V_2 \subset \mathbb{R}^4$ tali che $W \oplus V_1 = \mathbb{R}^4$, $W \oplus V_2 = \mathbb{R}^4$ e anche $V_1 \oplus V_2 = \mathbb{R}^4$. In caso di risposta affermativa scrivere delle basi di tali sottospazi.

Soluzione. (a) Se $v = (a_0, a_1, a_2, a_3) \in U$ il polinomio $p_v(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3$ si deve annullare per $X = 1$, quindi si deve avere $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0$. Da questa equazione si ricava $a_3 = -a_0 - a_1 - a_2$, mentre a_0, a_1, a_2 sono libere di variare. Pertanto U ha dimensione 3 e una sua base è formata dai vettori $(1, 0, 0, -1)$, $(0, 1, 0, -1)$, $(0, 0, 1, -1)$.

(b) Sia $w = \alpha w_1 + \beta w_2 = (2\alpha + \beta, 0, -2\beta, \alpha)$ un generico vettore di W. Il polinomio corrispondente è

$$p_w(X) = (2\alpha + \beta) - 2\beta X^2 + \alpha X^3$$

la cui derivata è

$$p'_w(X) = -4\beta X + 3\alpha X^2$$

Si ha quindi $p'_w(0) = 0$.
Non è vero che tutti i polinomi $f(X) \in V$ tali che $f'(0) = 0$ sono del tipo $f(X) = p_w(X)$. Infatti il polinomio $f(X) = 1$ ha la proprietà che $f'(0) = 0$, ma questo polinomio è associato al vettore $(1, 0, 0, 0)$ che non appartiene a W.

(c) Abbiamo visto che un generico vettore di W è $w = (2\alpha + \beta, 0, -2\beta, \alpha)$ e il polinomio corrispondente è

$$p_w(X) = (2\alpha + \beta) - 2\beta X^2 + \alpha X^3$$

Se richiediamo che $w \in U$ il polinomio corrispondente si deve annullare per $X = 1$, quindi si deve avere

$$(2\alpha + \beta) - 2\beta + \alpha = 0$$

da cui si ricava $\beta = 3\alpha$ (α è libera di variare). Questo significa che $\dim(U \cap W) = 1$. Per trovare una base di $U \cap W$ poniamo $\alpha = 1$, quindi $\beta = 3$ e in questo modo si ottiene il vettore $w = (5, 0, -6, 1)$.

(d) Dato che W ha dimensione 2 si deve avere $\dim V_1 = \dim V_2 = 2$. Siano v_1, v_2 una base di V_1 e v'_1, v'_2 una base di V_2. Per soddisfare alle richieste $W \oplus V_1 = \mathbb{R}^4$, $W \oplus V_2 = \mathbb{R}^4$ e $V_1 \oplus V_2 = \mathbb{R}^4$ bisogna scegliere i vettori v_1, v_2, v'_1, v'_2 in modo tale che $\{w_1, w_2, v_1, v_2\}$, $\{w_1, w_2, v'_1, v'_2\}$ e $\{v_1, v_2, v'_1, v'_2\}$ siano basi di $\mathbb{R}^4$. Si verifica facilmente che una possibile scelta è data dai seguenti vettori: $v_1 = (1, 0, 0, 0)$, $v_2 = (0, 1, 0, 0)$, $v'_1 = (0, 1, 1, 0)$, $v'_2 = (0, 0, 0, 1)$. Osserviamo che non è possibile prendere $v_1' = (0,0,1,0)$ perché con questa scelta i vettori $\{w_1, w_2, v_1', v_2'\}$ non sarebbero una base di $\mathbb{R}^4$: infatti la matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ha rango 3 e non 4.

Esercizio 2. Sia f l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ la cui matrice rispetto alla base canonica è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

(a) Trovare una base di $\operatorname{Ker} f$ e una base del suo ortogonale $(\operatorname{Ker} f)^\perp$.

(b) Sia $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la funzione lineare la cui matrice rispetto alla base canonica è la matrice trasposta di A. Trovare una base di $\operatorname{Im} g$ e verificare che $\operatorname{Im} g = (\operatorname{Ker} f)^\perp$.

(c) Per quale valore di t il vettore $v = (1, t, -1)$ appartiene all'immagine di f? Per tale valore di t si determini l'antiimmagine $f^{-1}(v)$.

(d) Consideriamo ora la base $\{u_1, u_2, u_3\}$ di $\mathbb{R}^3$, ove $u_1 = e_3$, $u_2 = e_2$, $u_3 = e_1$. Quale è la matrice di f rispetto alla base $\{u_1, u_2, u_3\}$?

Soluzione. (a) Riducendo A in forma a scala si trova la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

quindi A ha rango 2 e pertanto $\dim(\operatorname{Ker} f) = 1$. I vettori del nucleo di f sono dati dalle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ 2y - z = 0 \end{cases}$$

Si trova che una base di $\operatorname{Ker} f$ è formata dal vettore $(-3, 1, 2)$.
I vettori di $(\operatorname{Ker} f)^\perp$ sono i vettori ortogonali al vettore $(-3, 1, 2)$, quindi sono dati dalle soluzioni dell'equazione $-3x + y + 2z = 0$, da cui si ricava $y = 3x - 2z$. Da ciò segue che una base di $(\operatorname{Ker} f)^\perp$ è costituita dai vettori $(1, 3, 0)$ e $(0, -2, 1)$.

(b) La matrice di g è

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -3 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

che ha rango 2 (come la matrice A). Quindi l'immagine di g ha dimensione 2 ed è generata da due colonne di A^T. Dato che anche $(\operatorname{Ker} f)^\perp$ ha dimensione 2, per dimostrare che $\operatorname{Im} g = (\operatorname{Ker} f)^\perp$ basta dimostrare l'inclusione $\operatorname{Im} g \subseteq (\operatorname{Ker} f)^\perp$, cioè basta dimostrare che i vettori della base di $\operatorname{Im} g$ sono ortogonali al vettore $(-3, 1, 2)$ della base di $\operatorname{Ker} f$. Per fare ciò basta osservare che il prodotto scalare tra il vettore $(-3, 1, 2)$ e le colonne di A^T è zero.

(c) Scrivendo $(1, t, -1) = \alpha(1, 2, 1) + \beta(-1, 0, -3)$ si trova $\alpha = 2$, $\beta = 1$ e $t = 4$, quindi $v = (1, t, -1) \in \operatorname{Im} f$ per $t = 4$. L'antiimmagine $f^{-1}(v)$ è data dalle soluzioni del sistema (non omogeneo)

$$\begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ 2x + 3z = 4 \\ x - 3y + 3z = -1 \end{cases}$$

Risolvendo questo sistema si trova

$$f^{-1}(v) = (5,0,-2) + \langle(-3,1,2)\rangle$$

(d) Si ha:

$$\begin{aligned} f(u_1) &= f(e_3) = 2e_1 + 3e_2 + 3e_3 = 3u_1 + 3u_2 + 2u_3 \\ f(u_2) &= f(e_2) = -e_1 - 3e_3 = -3u_1 - u_3 \\ f(u_3) &= f(e_1) = e_1 + 2e_2 + e_3 = u_1 + 2u_2 + u_3 \end{aligned}$$

da cui si deduce che la matrice di f rispetto alla base $\{u_1, u_2, u_3\}$ è

$$\begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Esercizio 3. Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & t \end{pmatrix}$$

(a) Determinare il valore di t per il quale la funzione lineare rappresentata dalla matrice A **non è** iniettiva.

(b) Ora poniamo $t = 3$. Determinare il polinomio caratteristico e gli autovalori di A.

(c) Sempre per $t = 3$, determinare una base degli autospazi di A. Si dica se è possibile trovare una matrice diagonale D simile ad A.

Soluzione. (a) La matrice A rappresenta una funzione lineare $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ e una tale funzione è iniettiva se e solo se è biettiva e quindi invertibile. Pertanto il valore di t per cui tale funzione lineare non è iniettiva è il valore di t per cui la matrice A non è invertibile, cioè il valore di t per cui $\det A = 0$. Si ha

$$\det A = 2 \det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & t \end{pmatrix} = 2(t+1)$$

quindi $\det A = 0$ se e solo se $t = -1$.

(b) Il polinomio caratteristico di A è

$$\det \begin{pmatrix} 1-x & 0 & -1 \\ -1 & 2-x & -1 \\ 1 & 0 & 3-x \end{pmatrix} = (2-x)^3$$

quindi l'unico autovalore è $x = 2$, con molteplicità 3.

(c) Gli autovettori per l'autovalore 2 si trovano risolvendo il sistema

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Questo sistema si riduce alla sola equazione $x+z = 0$, da cui segue che l'autospazio ha dimensione 2 e una base di tale autospazio è formata dai vettori $v_1 = (1,0,-1)$ e $v_2 = (0,1,0)$. Dato che la dimensione dell'autospazio è diversa dalla molteplicità dell'autovalore 2, la matrice A non è diagonalizzabile. Pertanto non esiste una matrice diagonale simile ad A.

Esercizio 4. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ consideriamo il piano $\pi : 2x - y + z = 0$ e la retta r di equazioni $3x - z - 5 = 0$ e $y = 0$.

(a) Scrivere l'equazione cartesiana del piano σ che contiene la retta r e forma un angolo retto col piano π.

(b) Sia $A = r \cap \pi$. Scrivere le equazioni parametriche della retta r' passante per A, contenuta nel piano π e perpendicolare alla retta r.

(c) Sia $P = (1, -1, 3)$. Scrivere le equazioni parametriche della retta s passante per P, parallela al piano π e incidente la retta r.

(d) Trovare un punto R sulla retta r tale che $\text{dist}(P, R) = \text{dist}(P, \pi)$ [*ci sono due punti che soddisfano questa richiesta, è sufficiente trovarne uno*].

Soluzione. (a) Consideriamo il fascio di piani di asse r:

$$\mathcal{F} : \lambda(3x - z - 5) + \mu y = 0$$

Il vettore ortogonale al generico piano del fascio è $n_{\mathcal{F}} = (3\lambda, \mu, -\lambda)$. Richiedere che il piano che stiamo cercando formi un angolo retto col piano π equivale a richiedere che $n_{\mathcal{F}} \cdot n_\pi = 0$, ove $n_\pi = (2, -1, 1)$ è il vettore ortogonale al piano π. Da questa equazione si ricava $\mu = 5\lambda$, quindi possiamo prendere $\lambda = 1$ e $\mu = 5$. In questo modo si ottiene il piano $\sigma : 3x + 5y - z - 5 = 0$.

(b) Per trovare il punto A mettiamo a sistema le equazioni di r con l'equazione del piano π. Risolvendo il sistema si trova $A = (1, 0, -2)$. Ora cerchiamo un vettore direttore v_r della retta r ottenuto come differenza di due punti di r: si trova $v_r = (1, 0, 3)$. Un vettore direttore della retta r' è dato dal prodotto vettoriale tra il vettore v_r e il vettore n_π: si trova $v_{r'} = v_r \times n_\pi = (3, 5, -1)$. Pertanto le equazioni parametriche della retta r' sono

$$\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 5t \\ z = -2 - t \end{cases}$$

(c) Consideriamo un generico punto R della retta r, le cui coordinate sono date (ad esempio) da $R = (t, 0, 3t - 5)$. Il vettore $v_s = \vec{PR}$ è $v_s = \vec{PR} = R - P = (t - 1, 1, 3t - 8)$. Dato che la retta s deve essere parallela al piano π, si deve avere $v_s \cdot n_\pi = 0$, da cui si ricava $t = 11/5$. Il vettore v_s è quindi $v_s = (6/5, 1, -7/5)$ e pertanto le equazioni parametriche della retta s sono

$$\begin{cases} x = 1 + \frac{6}{5}\, t \\ y = -1 + t \\ z = 3 - \frac{7}{5}\, t \end{cases}$$

(d) Un generico punto R della retta r ha coordinate $R = (t, 0, 3t - 5)$. Si ha:

$$\text{dist}(P, R)^2 = \|R - P\|^2 = 10t^2 - 50t + 66$$

mentre $\text{dist}(P, \pi)^2 = 6$. Si ottiene quindi l'equazione $10t^2 - 50t + 66 = 6$, cioè $10t^2 - 50t + 60 = 0$, le cui soluzioni sono $t_1 = 2$ e $t_2 = 3$. I punti corrispondenti sulla retta r sono $R_1 = (2, 0, 1)$ e $R_2 = (3, 0, 4)$.