

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

4° appello — 7 febbraio 2023

Esercizio 1. Sia $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la funzione lineare la cui matrice (rispetto alla base canonica) è

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

- (a) Si determini se la matrice A è invertibile.
- (b) Sia $v_1 = (1, 1, 0)$, $v_2 = f(v_1)$ e $v_3 = f(v_2)$. Si dimostri che $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$.
- (c) Sia $v_4 = f(v_3)$. Si scriva v_4 come combinazione lineare dei vettori v_1, v_2, v_3 .
- (d) Si scriva la matrice B di f rispetto alla base $\mathcal{B}$ trovata al punto (b).
- (e) Dato che A e B sono matrici simili, esiste una matrice invertibile P tale che $A = P B P^{-1}$. Si trovi una tale matrice P .

Soluzione. (a) Il determinante di A è diverso da 0 ($\det A = -9$), quindi A è invertibile.

(b) Si ha $v_2 = f(v_1) = Av_1 = (1, 1, 2)$ e $v_3 = f(v_2) = Av_2 = (1, 5, 0)$. Ora si verifica facilmente che la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

ha rango 3, questo significa che v_1, v_2, v_3 sono linearmente indipendenti, quindi sono una base di $\mathbb{R}^3$.

(c) Si ha $v_4 = f(v_3) = Av_3 = (-3, 1, 10)$. Scrivendo v_4 come combinazione lineare di v_1, v_2, v_3 si trova

$$v_4 = -9v_1 + 5v_2 + v_3.$$

(d) Si ha $f(v_1) = v_2$ cioè $f(v_1) = 0v_1 + 1v_2 + 0v_3$, questo significa che nella prima colonna di B ci sono i numeri 0, 1, 0.

Si ha $f(v_2) = v_3$ cioè $f(v_2) = 0v_1 + 0v_2 + 1v_3$, questo significa che nella seconda colonna di B ci sono i numeri 0, 0, 1.

Infine si ha $f(v_3) = v_4$ cioè $f(v_3) = -9v_1 + 5v_2 + 1v_3$, questo significa che nella terza colonna di B ci sono i numeri -9, 5, 1.

Quindi la matrice B è

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -9 \\ 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(e) La matrice P di cambiamento di base ha sulle colonne le coordinate dei vettori v_1, v_2, v_3 (della nuova base).

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Esercizio 2. Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ 5 & 0 & t \end{pmatrix}$$

- (a) Calcolare gli autovalori di A e mostrare che per $t \neq 0$, $t \neq 5$ la matrice A è diagonalizzabile.
- (b) Consideriamo ora i due casi $t = 0$, $t = 5$. Per ciascuno di questi casi calcolare gli autovettori di A e dire se A è diagonalizzabile.
- (c) Stabilire se esistono dei valori di t per i quali A sia simile a una matrice triangolare superiore avente tutti gli elementi sulla diagonale principale diversi da zero.

Soluzione. (a) Il polinomio caratteristico di A è

$$(t - x)(x^2 - 5x)$$

quindi gli autovalori sono $0, 5, t$. Se $t \neq 0, t \neq 5$ ci sono tre autovalori distinti, quindi A è diagonalizzabile.

(b) Per $t = 0$ troviamo l'autovalore 0 con molteplicità 2 e l'autovalore 5 con molteplicità 1 . Per l'autovalore 5 troviamo l'autovettore $(1, -2, 1)$, ma per l'autovalore 0 (che ha molteplicità 2) troviamo un autospazio di dimensione 1 generato dal vettore $(0, 0, 1)$. Quindi per $t = 0$ la matrice A non è diagonalizzabile.

Per $t = 5$ troviamo l'autovalore 0 con molteplicità 1 e l'autovalore 5 con molteplicità 2 . Per l'autovalore 0 troviamo l'autovettore $(2, 1, -2)$, ma per l'autovalore 5 (che ha molteplicità 2) troviamo un autospazio di dimensione 1 generato dal vettore $(0, 0, 1)$. Quindi anche per $t = 5$ la matrice A non è diagonalizzabile.

(c) Per ogni valore di t la matrice A ha rango 2 (infatti ha un autovalore uguale a 0). Invece una matrice triangolare superiore avente tutti gli elementi sulla diagonale principale diversi da zero ha rango 3 , quindi non può essere simile ad A .

Esercizio 3. Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^4$, dotato del prodotto scalare usuale, sia U l'insieme delle soluzioni del seguente sistema:

$$U : \begin{cases} x_1 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

- Trovare la dimensione e una base di U .
- Determinare una base di $U^\perp$ e scrivere un sistema di equazioni nelle incognite x_1, x_2, x_3, x_4 il cui insieme delle soluzioni sia $U^\perp$.
- Dato il vettore $v = (1, 1, 1, 3) \in \mathbb{R}^4$, determinare le sue proiezioni ortogonali su U e su $U^\perp$.
- Si dica se esiste un sottospazio $W \subset \mathbb{R}^4$ tale che $U \oplus W = \mathbb{R}^4$ e $U^\perp \oplus W = \mathbb{R}^4$. Se W esiste trovare una sua base, altrimenti spiegare perché un tale W non può esistere.

Soluzione. (a) Risolvendo il sistema

$$\begin{cases} x_1 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

si trova

$$\begin{cases} x_1 = x_3 - 2x_4 \\ x_2 = -2x_3 + 2x_4 \end{cases}$$

Da ciò segue che U ha dimensione 2 e una sua base è formata dai vettori $u_1 = (1, -2, 1, 0)$ e $u_2 = (-2, 2, 0, 1)$.

(b) I vettori di $U^\perp$ sono ortogonali a u_1 e u_2 . Si ottengono le equazioni

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ -2x_1 + 2x_2 + x_4 = 0. \end{cases}$$

Risolvendo questo sistema si trova una base di $U^\perp$ formata dai vettori $u'_1 = (1, 0, -1, 2)$ e $u'_2 = (0, 1, 2, -2)$.

(c) Scriviamo $v = v' + v''$ con $v' \in U$ e $v'' \in U^\perp$. Poniamo $v' = a_1 u_1 + a_2 u_2 = (a_1 - 2a_2, -2a_1 + 2a_2, a_1, a_2)$. Si ha $v'' = v - v' = (1 - a_1 + 2a_2, 1 + 2a_1 - 2a_2, 1 - a_1, 3 - a_2)$. Imponendo le condizioni di perpendicolarità $v'' \cdot u_1 = 0$ e $v'' \cdot u_2 = 0$ si ottiene il sistema

$$\begin{cases} -6a_1 + 6a_2 = 0 \\ 6a_1 - 9a_2 + 3 = 0 \end{cases}$$

da cui si ricava $a_1 = a_2 = 1$. Pertanto i vettori v' e v'' sono

$$v' = (-1, 0, 1, 1), \quad v'' = (2, 1, 0, 2).$$

Queste sono le proiezioni ortogonali su U e su $U^\perp$.

(d) W esiste e ha dimensione 2. Per trovare una sua base basta trovare due vettori linealmente indipendenti dai vettori di U e anche dai vettori di $U^\perp$. Ad esempio, come base di W si possono prendere i vettori $(0, 0, 1, 0)$ e $(0, 0, 0, 1)$.

Esercizio 4. Nello spazio affine $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$ sia r la retta passante per $A = (0, 2, -1)$ e $B = (4, 0, 1)$ e sia s la retta di equazioni

$$s : \begin{cases} x - 2z = 3 \\ y + z = 3 \end{cases}$$

- Determinare un punto C sulla retta s tale che il vettore $\vec{AC}$ sia ortogonale al vettore $\vec{AB}$ e calcolare l'area del triangolo ABC .
- Verificare che le rette r e s sono parallele e scrivere l'equazione cartesiana del piano π che contiene r e s .
- Determinare per quale valore di t esistono delle rette passanti per il punto $P = (1, t, 0)$ che intersecano sia r che s .
- Dato il punto $Q = (6, -6, -9)$ determinare il punto Q' simmetrico di Q rispetto al piano π .

Soluzione. (a) Un vettore direttore della retta r è $v_r = B - A = (4, -2, 2)$. Un punto generico della retta s è $C = (3 + 2t, 3 - t, t)$. Il vettore AC è $C - A = (3 + 2t, 1 - t, 1 + t)$. Imponendo la condizione di perpendicolarità $v_r \cdot AC = 0$ si trova $t = -1$ e quindi il punto C cercato è $C = (1, 4, -1)$. Si ha $\|v_r\| = 2\sqrt{6}$ e $\|AC\| = \sqrt{5}$. Il triangolo ABC è rettangolo quindi la sua area è data da $\frac{1}{2} (2\sqrt{6} \sqrt{5}) = \sqrt{30}$.

(b) Un vettore direttore della retta s è $v_s = (2, -1, 1)$. Dato che v_r è il doppio di v_s , le rette r e s sono parallele. Per trovare l'equazione cartesiana del piano π che contiene r e s consideriamo il fascio di piani di asse s

$$\lambda(x - 2z - 3) + \mu(y + z - 3) = 0$$

e imponiamo il passaggio per il punto A della retta r . Si trova $\lambda = -2\mu$ e possiamo quindi prendere $\mu = -1$ e $\lambda = 2$. Sostituendo questi valori nell'equazione del fascio di piani si ottiene l'equazione del piano π cercato:

$$\pi : 2x - y - 5z - 3 = 0.$$

(c) Affinché esistano delle rette passanti per il punto $P = (1, t, 0)$ che intersecano sia r che s bisogna che il punto P appartenga al piano π appena trovato. Sostituendo le coordinate di P nell'equazione di π si trova $t = -1$, quindi il punto cercato è $P = (1, -1, 0)$.

(d) Il vettore normale al piano π è $n = (2, -1, -5)$. La retta passante per Q e perpendicolare al piano π ha equazioni

$$\begin{cases} x = 6 + 2t \\ y = -6 - t \\ z = -9 - 5t \end{cases}$$

Intersecando questa retta con il piano π si trova il punto $H = (2, -4, 1)$, il quale è la proiezione ortogonale di Q su π . Il punto Q' è tale che H sia il punto medio del segmento QQ' , cioè $H = (Q + Q')/2$, e quindi $Q' = 2H - Q = (-2, -2, 11)$.