A

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

2^{o} appello — 9 luglio 2024

Esercizio 1. In $\mathbb{R}^4$ sia U il sottospazio di equazioni

$$U : \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_4 = 0 \\ 3x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \\ 3x_1 + 2x_3 + t\,x_4 = 0 \end{cases}$$

(a) Trovare il valore di t per cui U ha dimensione 2 e, per tale valore di t, scrivere una base di U.

(b) Applicando il procedimento di Gram–Schmidt alla base trovata al punto (a) ottenere una base ortogonale di U.

(c) Per il valore di t trovato al punto (a) scrivere una base del sottospazio $U^\perp$.

(d) Dato $v = (3, 2, 2, -2) \in \mathbb{R}^4$ scrivere l'equazione cartesiana di un sottospazio W di dimensione 3 tale che la proiezione ortogonale di v su W sia il vettore $w = (1, 2, 1, 1)$.

Soluzione. (a) La matrice del sistema di equazioni di U è

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 2 & t \end{pmatrix}$$

Riducendo questa matrice in forma a scala si ottiene

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & t+1 \end{pmatrix}$$

da cui si deduce che il rango è 2 se e solo se $t = -1$. Questo è il valore di t per cui $\dim U = 2$. Per $t = -1$ la matrice del sistema diventa

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

quindi il sistema si riduce alle sole due equazioni

$$U : \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_4 = 0 \\ 3x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$$

da cui si ricava

$$\begin{cases} x_1 = 2x_2 - x_4 \\ x_3 = -3x_2 + 2x_4 \end{cases}$$

e quindi una base di U è formata dai due vettori $u_1 = (2, 1, -3, 0)$ e $u_2 = (-1, 0, 2, 1)$.

(b) Poniamo $u_1' = u_1$ e $u_2' = u_2 + \alpha u_1'$. Imponendo che sia $u_1' \cdot u_2' = 0$ si trova $\alpha = 4/7$ e quindi $u_2' = u_2 + \frac{4}{7}\,u_1$. I vettori u_1' e u_2' formano una base ortogonale di U.

(c) Per $t = -1$ le equazioni di U sono

$$U : \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_4 = 0 \\ 3x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$$

Ora basta osservare che i coefficienti presenti in queste due equazioni sono le coordinate dei due vettori di una base di $U^\perp$. Pertanto una base di $U^\perp$ è formata dai due vettori seguenti: $(1, -2, 0, 1)$ e $(0, 3, 1, -2)$.

(d) Si deve avere $v = w + n$, ove n è un vettore perpendicolare al sottospazio W. Possiamo quindi ricavare $n = v - w = (2, 0, 1, -3)$. Si noti che $n \cdot w = 0$, come deve essere.
Il sottospazio W ha dimensione 3, quindi la sua equazione è del tipo $a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+a_4x_4 = 0$. Ricordiamo che il vettore (a_1, a_2, a_3, a_4) è perpendicolare a W, quindi possiamo prendere $(a_1, a_2, a_3, a_4) = n = (2, 0, 1, -3)$. Da ciò segue che l'equazione di W è $2x_1 + x_3 - 3x_4 = 0$.

Esercizio 2. Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ la seguente funzione lineare:

$$f(x, y, z) = (x - y + 2z,\ -2x + 3y - z,\ y + 3z,\ -x + 3y + tz)$$

(a) Determinare la dimensione dell'immagine di f al variare del parametro $t \in \mathbb{R}$.

(b) Esistono dei valori di t per cui f è suriettiva? Se sì, quali sono? Esistono dei valori di t per cui f è iniettiva? Se sì, quali sono?

(c) Per il valore di t per cui f ha rango 2 scrivere una base di $\operatorname{Ker} f$ e una base di $\operatorname{Im} f$.

(d) Esistono dei valori di t per i quali il vettore $w = (1, 1, 0, 1)$ appartiene all'immagine di f?

(e) Ora poniamo $t = 0$. Esiste una funzione lineare $g\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ tale che la funzione composta $g \circ f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sia l'identità?

Soluzione. (a) La matrice di f rispetto alle basi canoniche è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & t \end{pmatrix}$$

Riducendo questa matrice in forma a scala si ottiene

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & t-4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

da cui si deduce che il rango (cioè la dimensione dell'immagine di f) è 2 se $t = 4$, mentre per $t \neq 4$ il rango è 3.

(b) f è suriettiva se e solo se $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^4$, ma la dimensione dell'immagine di f non è mai 4, quindi f non è mai suriettiva.
f è iniettiva se e solo se $\dim \operatorname{Ker} f = 0$, il che avviene per $t \neq 4$.

(c) Poniamo $t = 4$. La matrice in forma a scala diventa

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

quindi il nucleo di f si trova risolvendo il sistema

$$\begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ y + 3z = 0 \end{cases}$$

Le soluzioni sono

$$\begin{cases} x = -5z \\ y = -3z \end{cases}$$

quindi $\operatorname{Ker} f$ ha dimensione 1 e una sua base è data dal vettore $(-5, -3, 1)$.
L'immagine di f ha dimensione 2 e una sua base è formata da due colonne della matrice A (ad esempio, le prime due colonne).

(d) $w \in \operatorname{Im} f$ se e solo se il sistema $AX = w$ ha soluzione. Consideriamo la matrice completa del sistema

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & t & 1 \end{array}\right)$$

e riduciamola in forma a scala:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & t-4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right)$$

Si vede che per nessun valore di t la matrice completa e la matrice A hanno lo stesso rango, quindi il sistema $AX = w$ non ha mai soluzione (per il Teorema di Rouché–Capelli, oppure perché la quarta equazione del sistema si riduce a $0 = -3$).

(e) Per $t = 0$ la funzione f è iniettiva, quindi g esiste. Infatti sia v_1, v_2, v_3 base di $\mathbb{R}^3$. Dato che f è iniettiva i vettori $w_1 = f(v_1)$, $w_2 = f(v_2)$, $w_3 = f(v_3)$ sono linearmente indipendenti. Possiamo quindi aggiungere un vettore w_4 in modo che i vettori w_1, w_2, w_3, w_4 siano una base di $\mathbb{R}^4$. Ora definiamo g ponendo $g(w_1) = v_1$, $g(w_2) = v_2$, $g(w_3) = v_3$ e $g(w_4)$ possiamo definirlo in modo arbitrario, ad esempio $g(w_4) = 0$. Allora si ha $g \circ f(v) = g(f(v)) = v$, per ogni $v \in \mathbb{R}^3$, quindi $g \circ f$ è l'identità.

Esercizio 3. Consideriamo la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

(a) Per quale valore di $t \in \mathbb{R}$ la matrice A **non** è invertibile?

(b) Determinare gli autovalori di A e dire per quali $t \in \mathbb{R}$ tutti gli autovalori sono reali.

(c) Determinare per quali $t \in \mathbb{R}$ ci sono autovalori con molteplicità > 1.

(d) Per ciascuno dei valori di t trovati al punto (c) scrivere una base degli autospazi corrispondenti agli autovalori con molteplicità > 1 e dire se A è diagonalizzabile.

Soluzione. (a) Si ha $\det(A) = -2 - 4t = 0$ per $t = -1/2$. Questo è l'unico valore di t per cui A non è invertibile.

(b) Il polinomio caratteristico di A è $(2 - x)(x^2 - 2t - 1)$, quindi gli autovalori sono 2, $\sqrt{2t+1}$ e $-\sqrt{2t+1}$. Gli autovalori sono reali se $2t + 1 \geq 0$, cioè per $t \geq -1/2$.

(c) Se $t = -1/2$ gli autovalori sono 2 (con molteplicità 1) e 0 con molteplicità 2.
Un altro caso si ha quando $\sqrt{2t+1} = 2$, cioè $2t + 1 = 4$ e quindi $t = 3/2$. In questo caso gli autovalori sono 2 con molteplicità 2 e -2 con molteplicità 1.
Si noti che non è possibile avere $-\sqrt{2t+1} = 2$ perché $-\sqrt{2t+1}$ è negativo mentre 2 è positivo.

(d) Consideriamo il caso $t = -1/2$. Per questo valore di t la matrice A ha l'autovalore 0 con molteplicità 2. Gli autovettori corrispondenti sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x - \frac{1}{2}\, z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases}$$

L'insieme delle soluzioni di questo sistema (cioè l'autospazio) ha dimensione 1 e una sua base è data dal vettore $(1, -3/2, 2)$. Dato che questo autospazio ha dimensione 1 mentre l'autovalore corrispondente ha molteplicità 2 si conclude che per $t = -1/2$ la matrice A non è diagonalizzabile. Consideriamo ora il caso $t = 3/2$. Per questo valore di t la matrice A ha l'autovalore 2 con molteplicità 2. Gli autovettori corrispondenti sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} -x + \frac{3}{2}\, z = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}$$

L'insieme delle soluzioni di questo sistema (cioè l'autospazio) ha dimensione 1 e una sua base è data dal vettore $(0, 1, 0)$. Dato che questo autospazio ha dimensione 1 mentre l'autovalore corrispondente ha molteplicità 2 si conclude che per $t = 3/2$ la matrice A non è diagonalizzabile.

Esercizio 4. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ sono assegnati i punti $A = (6, -1, -4)$, $B = (1, 1, -1)$ e il piano $\pi : 2x - y - 2z = 3$.

(a) Sia C la proiezione ortogonale di A sul piano π. Determinare il punto C, verificare che $B \in \pi$ e calcolare l'area del triangolo $\triangle ABC$.

(b) Scrivere l'equazione cartesiana del piano contenente il triangolo $\triangle ABC$.

(c) Scrivere le equazioni parametriche della retta s passante per il punto B, contenuta nel piano π e ortogonale alla retta per A e B.

(d) Determinare il valore del parametro t affinché la retta $r_t : \begin{cases} t\,x - y + 2 = 0 \\ x + z + 1 = 0 \end{cases}$ sia parallela al piano π.

Soluzione. (a) Le coordinate di B verificano l'equazione di π, quindi $B \in \pi$. Il punto C è la proiezione ortogonale di A su π. Consideriamo il vettore $n = (2, -1, -2)$ normale al piano π. La retta passante per A e ortogonale a π ha le seguenti equazioni:

$$\begin{cases} x = 6 + 2u \\ y = -1 - u \\ z = -4 - 2u \end{cases}$$

Mettendo a sistema con l'equazione di π si trova $u = -2$, da cui segue che il punto C ha coordinate $C = (2, 1, 0)$. Si ha poi $\|\vec{AC}\| = 6$, $\|\vec{BC}\| = \sqrt{2}$, quindi l'area del triangolo $\triangle ABC$ è $3\sqrt{2}$.

(b) Scriviamo le equazioni parametriche del piano passante per il punto C e parallelo ai vettori $\vec{AC}$ e $\vec{BC}$:

$$\begin{cases} x = 2 - 4a + b \\ y = 1 + 2a \\ z = 0 + 4a + b \end{cases}$$

Eliminando i due parametri a e b si trova la seguente equazione cartesiana del piano contenente il triangolo $\triangle ABC$: $x + 4y - z - 6 = 0$.

(c) Il vettore v_s della retta s deve essere perpendicolare al vettore $\vec{AB} = (-5, 2, 3)$ e al vettore $n = (2, -1, -2)$ normale al piano π. Possiamo quindi prendere $v_s = \vec{AB} \times n = (-1, -4, 1)$. Pertanto le equazioni parametriche della retta s sono:

$$\begin{cases} x = 1 - u \\ y = 1 - 4u \\ z = -1 + u \end{cases}$$

(d) Consideriamo due punti della retta r_t: $R_1 = (0, 2, -1)$, $R_2 = (1, t + 2, -2)$. Il vettore direttore di tale retta è $R_2 - R_1 = (1, t, -1)$. Questo vettore deve essere ortogonale al vettore $n = (2, -1, -2)$, affinché la retta r_t sia parallela al piano π. Si trova così $t = 4$.