A

Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ____________

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

1º Compitino — 12 aprile 2025

Esercizio 1. In $\mathbb{R}^4$ sia U il sottospazio di equazione $x_1 - 2x_3 + x_4 = 0$ e sia $u_1 = (1, 1, 1, 1) \in U$.

(a) Trovare due vettori u_2, u_3 tali che $\{ u_1, u_2, u_3 \}$ sia una base di U.

(b) Sia $W \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio generato dai vettori $w_1 = (1, 2, 2, 0)$, $w_2 = (1, 2, -2, -2)$, $w_3 = (2, 4, 6, 1)$. Trovare una base di W e scrivere le equazioni cartesiane di W.

(c) Trovare una base di $U \cap W$ e una base di $U + W$.

(d) Sia $S \subset \mathbb{R}^4$ l'insieme delle soluzioni dell'equazione $x_2 + x_3 + x_4 = 1$. Dire se S è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$. Trovare una base del sottospazio di $\mathbb{R}^4$ generato da S.

Esercizio 2. Consideriamo il seguente sistema di equazioni, con $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ -3x_1 + 5x_2 + 7x_3 + a\, x_4 = 0 \end{cases}$$

(a) Scrivere la matrice A del sistema, ridurla in forma a scala per righe e determinare il rango di A al variare di $a \in \mathbb{R}$.

(b) Determinare la dimensione dello spazio S delle soluzioni di tale sistema al variare di $a \in \mathbb{R}$. Trovare una base di S per il valore di a per cui $\dim S = 1$.

(c) Consideriamo il vettore $w = (0, 1, -1, b)$. Dire per quali valori di a e b il sistema $AX = w$ ha una soluzione, infinite soluzioni, oppure nessuna soluzione.

(d) Risolvere il sistema $AX = w$ ponendo $a = 0$ e $b = 1$.

Esercizio 3. Sia $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la funzione lineare definita da

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \begin{pmatrix} x_1 - 2x_3 + 3x_4 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 \\ -4x_1 - 3x_2 - x_3 \\ -3x_1 - 2x_2 - x_4 \end{pmatrix}$$

(a) Scrivere la matrice di f nella base canonica del dominio e del codominio.

(b) Trovare una base di $\operatorname{Ker} f$ e una base di $\operatorname{Im} f$.

(c) Determinare l'antiimmagine del vettore $(1, 0, 2, 1)$ (cioè $f^{-1}(1, 0, 2, 1)$).

(d) Sia $U \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio generato da $u_1 = (1, 0, 1, 0)$ e $u_2 = (0, 1, 0, 1)$, e sia $V = \operatorname{Im} f$. Sia $h\colon U \to V$ la funzione definita da $h(u) = f(u)$, per ogni $u \in U$. Scrivere la matrice di h nella base u_1, u_2 di U e nella base di $V = \operatorname{Im} f$ trovata al punto (b).

B

Cognome ____________________ Nome ____________________ Matricola ____________

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

1^O^ Compitino — 12 aprile 2025

Esercizio 1. In $\mathbb{R}^4$ sia U il sottospazio di equazione $x_2+2x_3-3x_4=0$ e sia $u_1=(1,1,1,1)\in U$.

(a) Trovare due vettori u_2, u_3 tali che $\{u_1,u_2,u_3\}$ sia una base di U.

(b) Sia $W\subset\mathbb{R}^4$ il sottospazio generato dai vettori $w_1=(2,0,-4,-1)$, $w_2=(-2,1,6,1)$, $w_3=(2,3,2,-1)$. Trovare una base di W e scrivere le equazioni cartesiane di W.

(c) Trovare una base di $U\cap W$ e una base di $U+W$.

(d) Sia $S\subset\mathbb{R}^4$ l'insieme delle soluzioni dell'equazione $x_1+x_3+x_4=1$. Dire se S è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$. Trovare una base del sottospazio di $\mathbb{R}^4$ generato da S.

Esercizio 2. Consideriamo il seguente sistema di equazioni, con $a\in\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x_1+2x_2+x_4=0\\ 2x_1+3x_2+x_3+2x_4=0\\ 2x_1+2x_2+3x_3+4x_4=0\\ 3x_1+x_2+7x_3+a\,x_4=0\end{cases}$$

(a) Scrivere la matrice A del sistema, ridurla in forma a scala per righe e determinare il rango di A al variare di $a\in\mathbb{R}$.

(b) Determinare la dimensione dello spazio S delle soluzioni di tale sistema al variare di $a\in\mathbb{R}$. Trovare una base di S per il valore di a per cui $\dim S=1$.

(c) Consideriamo il vettore $w=(0,1,4,b)$. Dire per quali valori di a e b il sistema $AX=w$ ha una soluzione, infinite soluzioni, oppure nessuna soluzione.

(d) Risolvere il sistema $AX=w$ ponendo $a=6$ e $b=7$.

Esercizio 3. Sia $f\colon\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4$ la funzione lineare definita da

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=\begin{pmatrix} x_1+3x_3-x_4\\ -2x_1+x_2-x_3+3x_4\\ -x_1+2x_2+7x_3+3x_4\\ -3x_1+2x_2+x_3+5x_4\end{pmatrix}$$

(a) Scrivere la matrice di f nella base canonica del dominio e del codominio.

(b) Trovare una base di $\operatorname{Ker} f$ e una base di $\operatorname{Im} f$.

(c) Determinare l'antiimmagine del vettore $(1,0,3,1)$ (cioè $f^{-1}(1,0,3,1)$).

(d) Sia $U\subset\mathbb{R}^4$ il sottospazio generato da $u_1=(1,0,1,0)$ e $u_2=(0,1,0,1)$, e sia $V=\operatorname{Im} f$. Sia $h\colon U\to V$ la funzione definita da $h(u)=f(u)$, per ogni $u\in U$. Scrivere la matrice di h nella base u_1,u_2 di U e nella base di $V=\operatorname{Im} f$ trovata al punto (b).

C

Cognome ____________ Nome ____________ Matricola ____________

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

1º Compitino — 12 aprile 2025

Esercizio 1. In $\mathbb{R}^4$ sia U il sottospazio di equazione $2x_1 - x_2 - x_4 = 0$ e sia $u_1 = (1, 1, 1, 1) \in U$.

(a) Trovare due vettori u_2, u_3 tali che $\{ u_1, u_2, u_3 \}$ sia una base di U.

(b) Sia $W \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio generato dai vettori $w_1 = (2, -2, -1, 0)$, $w_2 = (-2, 4, 2, 1)$, $w_3 = (4, 2, 1, 3)$. Trovare una base di W e scrivere le equazioni cartesiane di W.

(c) Trovare una base di $U \cap W$ e una base di $U + W$.

(d) Sia $S \subset \mathbb{R}^4$ l'insieme delle soluzioni dell'equazione $x_1 + x_2 + x_4 = 1$. Dire se S è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$. Trovare una base del sottospazio di $\mathbb{R}^4$ generato da S.

Esercizio 2. Consideriamo il seguente sistema di equazioni, con $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ -2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \\ -3x_1 - x_2 + x_3 + a\,x_4 = 0 \end{cases}$$

(a) Scrivere la matrice A del sistema, ridurla in forma a scala per righe e determinare il rango di A al variare di $a \in \mathbb{R}$.

(b) Determinare la dimensione dello spazio S delle soluzioni di tale sistema al variare di $a \in \mathbb{R}$. Trovare una base di S per il valore di a per cui $\dim S = 1$.

(c) Consideriamo il vettore $w = (0, -2, 1, b)$. Dire per quali valori di a e b il sistema $AX = w$ ha una soluzione, infinite soluzioni, oppure nessuna soluzione.

(d) Risolvere il sistema $AX = w$ ponendo $a = 5$ e $b = -2$.

Esercizio 3. Sia $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la funzione lineare definita da

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \begin{pmatrix} x_1 - 2x_3 + x_4 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 \end{pmatrix}$$

(a) Scrivere la matrice di f nella base canonica del dominio e del codominio.

(b) Trovare una base di $\operatorname{Ker} f$ e una base di $\operatorname{Im} f$.

(c) Determinare l'antiimmagine del vettore $(-1, 0, 3, 2)$ (cioè $f^{-1}(-1, 0, 3, 2)$).

(d) Sia $U \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio generato da $u_1 = (1, 0, 1, 0)$ e $u_2 = (0, 1, 0, -1)$, e sia $V = \operatorname{Im} f$. Sia $h\colon U \to V$ la funzione definita da $h(u) = f(u)$, per ogni $u \in U$. Scrivere la matrice di h nella base u_1, u_2 di U e nella base di $V = \operatorname{Im} f$ trovata al punto (b).

D

Cognome ____________ Nome ____________ Matricola ____________

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

1º Compitino — 12 aprile 2025

Esercizio 1. In $\mathbb{R}^4$ sia U il sottospazio di equazione $3x_2 - x_3 - 2x_4 = 0$ e sia $u_1 = (1,1,1,1) \in U$.

(a) Trovare due vettori u_2, u_3 tali che $\{ u_1, u_2, u_3 \}$ sia una base di U.

(b) Sia $W \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio generato dai vettori $w_1 = (2,0,-1,1)$, $w_2 = (-2,3,1,2)$, $w_3 = (4,1,-2,3)$. Trovare una base di W e scrivere le equazioni cartesiane di W.

(c) Trovare una base di $U \cap W$ e una base di $U + W$.

(d) Sia $S \subset \mathbb{R}^4$ l'insieme delle soluzioni dell'equazione $x_1 + x_3 + x_4 = 1$. Dire se S è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$. Trovare una base del sottospazio di $\mathbb{R}^4$ generato da S.

Esercizio 2. Consideriamo il seguente sistema di equazioni, con $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_4 = 0 \\ -2x_1 - 5x_2 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + a\,x_4 = 0 \end{cases}$$

(a) Scrivere la matrice A del sistema, ridurla in forma a scala per righe e determinare il rango di A al variare di $a \in \mathbb{R}$.

(b) Determinare la dimensione dello spazio S delle soluzioni di tale sistema al variare di $a \in \mathbb{R}$. Trovare una base di S per il valore di a per cui $\dim S = 1$.

(c) Consideriamo il vettore $w = (0,1,0,b)$. Dire per quali valori di a e b il sistema $AX = w$ ha una soluzione, infinite soluzioni, oppure nessuna soluzione.

(d) Risolvere il sistema $AX = w$ ponendo $a = 3$ e $b = 2$.

Esercizio 3. Sia $f \colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la funzione lineare definita da

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4) = \begin{pmatrix} x_1 + 3x_3 + 2x_4 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 \\ -x_1 + x_2 - 7x_3 - 5x_4 \end{pmatrix}$$

(a) Scrivere la matrice di f nella base canonica del dominio e del codominio.

(b) Trovare una base di $\operatorname{Ker} f$ e una base di $\operatorname{Im} f$.

(c) Determinare l'antiimmagine del vettore $(1,3,5,0)$ (cioè $f^{-1}(1,3,5,0)$).

(d) Sia $U \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio generato da $u_1 = (1,0,1,0)$ e $u_2 = (0,1,0,-1)$, e sia $V = \operatorname{Im} f$. Sia $h \colon U \to V$ la funzione definita da $h(u) = f(u)$, per ogni $u \in U$. Scrivere la matrice di h nella base u_1, u_2 di U e nella base di $V = \operatorname{Im} f$ trovata al punto (b).