A

Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ___________

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

1º Compitino — 12 aprile 2025

Esercizio 1. In $\mathbb{R}^4$ sia U il sottospazio di equazione $x_1-2x_3+x_4=0$ e sia $u_1=(1,1,1,1)\in U$.

(a) Trovare due vettori u_2, u_3 tali che $\{u_1,u_2,u_3\}$ sia una base di U.

(b) Sia $W\subset\mathbb{R}^4$ il sottospazio generato dai vettori $w_1=(1,2,2,0)$, $w_2=(1,2,-2,-2)$, $w_3=(2,4,6,1)$. Trovare una base di W e scrivere le equazioni cartesiane di W.

(c) Trovare una base di $U\cap W$ e una base di $U+W$.

(d) Sia $S\subset\mathbb{R}^4$ l'insieme delle soluzioni dell'equazione $x_2+x_3+x_4=1$. Dire se S è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$. Trovare una base del sottospazio di $\mathbb{R}^4$ generato da S.

Soluzione. (a) Dall'equazione $x_1-2x_3+x_4=0$ ricaviamo $x_1=2x_3-x_4$ e da questa uguaglianza possiamo dedurre che i vettori $(0,1,0,0)$, $(2,0,1,0)$, $(-1,0,0,1)$ formano una base di U. Possiamo quindi prendere (ad esempio) $u_2=(0,1,0,0)$ e $u_3=(2,0,1,0)$. L'ultima cosa che rimane da fare è controllare che i tre vettori u_1,u_2,u_3 siano linearmente indipendenti, il che consiste in una facile verifica.

(b) Controllando se i vettori w_1,w_2,w_3 sono linearmente indipendenti si scopre che non lo sono (infatti si ha $5w_1-w_2-2w_3=0$). I vettori w_1 e w_2 sono linearmente indipendenti, quindi essi sono una base di W. Se indichiamo con (x_1,x_2,x_3,x_4) un generico vettore di W si ha pertanto

$$(x_1,x_2,x_3,x_4)=a_1\,w_1+a_2\,w_2=(a_1+a_2,2a_1+2a_2,2a_1-2a_2,-2a_2).$$

Eliminando i parametri a_1 e a_2 si trovano le seguenti equazioni cartesiane di W:

$$W:\begin{cases}2x_1-x_2=0\\2x_1-x_3+2x_4=0\end{cases}$$

(c) Per trovare $U\cap W$ basta mettere a sistema l'equazione di U con le equazioni di W:

$$\begin{cases}x_1-2x_3+x_4=0\\2x_1-x_2=0\\2x_1-x_3+2x_4=0\end{cases}$$

Risolvendo questo sistema si ottiene

$$\begin{cases}x_1=-x_4\\x_2=-2x_4\\x_3=0\end{cases}$$

Si deduce che $\dim(U\cap W)=1$ e una base è data dal vettore $(-1,-2,0,1)$.
Dalla formula di Grassmann segue che $\dim(U+W)=4$, quindi $U+W=\mathbb{R}^4$ e come base di $U+W$ possiamo prendere la base canonica di $\mathbb{R}^4$.

(d) Sicuramente S non è sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ perché l'equazione $x_2+x_3+x_4=1$ non è omogenea (quindi il vettore nullo non appartiene a S). Dall'equazione di S si ricava $x_2=1-x_3-x_4$, quindi i vettori di S sono del tipo $(x_1,1-x_3-x_4,x_3,x_4)$. Dato che

$$(x_1,1-x_3-x_4,x_3,x_4)=(0,1,0,0)+x_1(1,0,0,0)+x_3(0,-1,1,0)+x_4(0,-1,0,1)$$

si vede che per poter scrivere tutti i vettori di S abbiamo bisogno dei 4 vettori

$$(0,1,0,0), \quad (1,0,0,0), \quad (0,-1,1,0), \quad (0,-1,0,1).$$

Poiché questi 4 vettori sono linearmente indipendenti (verificarlo per esercizio), si conclude che il più piccolo sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ che contiene S (cioè il sottospazio generato da S) ha dimensione 4, quindi è uguale a $\mathbb{R}^4$. Pertanto come base del sottospazio di $\mathbb{R}^4$ generato da S possiamo prendere la base canonica di $\mathbb{R}^4$.

Esercizio 2. Consideriamo il seguente sistema di equazioni, con $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ -3x_1 + 5x_2 + 7x_3 + a\,x_4 = 0 \end{cases}$$

(a) Scrivere la matrice A del sistema, ridurla in forma a scala per righe e determinare il rango di A al variare di $a \in \mathbb{R}$.

(b) Determinare la dimensione dello spazio S delle soluzioni di tale sistema al variare di $a \in \mathbb{R}$. Trovare una base di S per il valore di a per cui $\dim S = 1$.

(c) Consideriamo il vettore $w = (0, 1, -1, b)$. Dire per quali valori di a e b il sistema $AX = w$ ha una soluzione, infinite soluzioni, oppure nessuna soluzione.

(d) Risolvere il sistema $AX = w$ ponendo $a = 0$ e $b = 1$.

Soluzione. (a) La matrice A del sistema è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & -1 & -1 \\ -3 & 5 & 7 & a \end{pmatrix}$$

Riducendo A in forma a scala si trova la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 \end{pmatrix}$$

Da ciò si deduce che il rango di A è 3 se $a = 1$, mentre per $a \neq 1$ il rango è 4.

(b) La dimensione di S è $4 - \text{rango}(A)$. Quindi $\dim S = 1$ se $a = 1$, mentre se $a \neq 1$ si ha $\dim S = 0$.
Per $a = 1$ la matrice in forma a scala diventa

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e il sistema corrispondente è

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

Risolvendo questo sistema si trova

$$\begin{cases} x_3 = -x_4 \\ x_2 = 3x_4 \\ x_1 = 3x_4 \end{cases}$$

quindi una base di S è data dal vettore $(3, 3, -1, 1)$.

(c) Per studiare il sistema $AX = w$ consideriamo la matrice completa

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -1 & -1 & -1 \\ -3 & 5 & 7 & a & b \end{array}\right)$$

Riducendo la matrice completa in forma a scala si trova

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 & b-3 \end{array}\right)$$

Ora basta ricordare il teorema di Rouché–Capelli per concludere quanto segue:
- se $a \neq 1$ il sistema ha una unica soluzione per ogni valore di b;
- se $a = 1$ e $b = 3$ il sistema ha infinite soluzioni;
- se $a = 1$ e $b \neq 3$ il sistema non ha soluzioni.

(d) Poniamo $a = 0$ e $b = 1$. La matrice completa ridotta in forma a scala è

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right)$$

Il sistema corrispondente a questa matrice è

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ x_2 + 3x_3 = 1 \\ x_3 + x_4 = 1 \\ -x_4 = -2 \end{cases}$$

Risolvendolo (con una sostituzione all'indietro) si trova:

$$\begin{cases} x_4 = 2 \\ x_3 = -1 \\ x_2 = 4 \\ x_1 = 4. \end{cases}$$

Esercizio 3. Sia $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la funzione lineare definita da

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \begin{pmatrix} x_1 - 2x_3 + 3x_4 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 \\ -4x_1 - 3x_2 - x_3 \\ -3x_1 - 2x_2 - x_4 \end{pmatrix}$$

(a) Scrivere la matrice di f nella base canonica del dominio e del codominio.

(b) Trovare una base di $\operatorname{Ker} f$ e una base di $\operatorname{Im} f$.

(c) Determinare l'antiimmagine del vettore $(1, 0, 2, 1)$ (cioè $f^{-1}(1, 0, 2, 1)$).

(d) Sia $U \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio generato da $u_1 = (1, 0, 1, 0)$ e $u_2 = (0, 1, 0, 1)$, e sia $V = \operatorname{Im} f$. Sia $h \colon U \to V$ la funzione definita da $h(u) = f(u)$, per ogni $u \in U$. Scrivere la matrice di h nella base u_1, u_2 di U e nella base di $V = \operatorname{Im} f$ trovata al punto (b).

Soluzione. (a) La matrice di f nella base canonica del dominio e del codominio è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ -4 & -3 & -1 & 0 \\ -3 & -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(b) Riducendo A in forma a scala si trova la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

da cui si deduce che il rango di A, cioè la dimensione dell'immagine di f, è 2. Come base di $\operatorname{Im} f$ possiamo quindi prendere due colonne di A, ad esempio le colonne $w_1 = (1, 2, -4, -3)$ e $w_2 = (0, 1, -3, -2)$ (che sono ovviamente indipendenti).
Per trovare una base di $\operatorname{Ker} f$ bisogna risolvere il sistema

$$\begin{cases} x_1 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 0 \end{cases}$$

Risolvendolo si trova:

$$\begin{cases} x_2 = -3x_3 + 4x_4 \\ x_1 = 2x_3 - 3x_4 \end{cases}$$

Da ciò si deduce che una base di $\operatorname{Ker} f$ è data dai vettori $(2, -3, 1, 0)$ e $(-3, 4, 0, 1)$.

(c) L'antiimmagine del vettore $(1, 0, 2, 1)$ è l'insieme delle soluzioni del sistema $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, 0, 2, 1)$. Risolvendo tale sistema si trova che

$$f^{-1}(1, 0, 2, 1) = (-1, 0, 2, 2) + \operatorname{Ker} f.$$

(d) Come base di $V = \operatorname{Im} f$ usiamo i vettori w_1 e w_2 trovati al punto (b). Si ha:

$$\begin{aligned} h(u_1) &= (-1, 1, -5, -3) = -1\, w_1 + 3\, w_2 \\ h(u_2) &= (3, 3, -3, -3) = 3\, w_1 - 3\, w_2 \end{aligned}$$

quindi la matrice di h è

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$$