A

Cognome ______________ Nome ______________ Matricola ____________

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

1º Compitino — 22 aprile 2023

Esercizio 1. In $\mathbb{R}^4$ sia U il sottospazio generato dai vettori $u_1 = (1, 0, -1, 2)$, $u_2 = (0, 2, -1, 1)$, $u_3 = (3, -4, -1, 4)$, $u_4 = (2, -6, 1, t)$.

(a) Per quale valore di t si ha $\dim U = 2$?

(b) Ora si ponga $t = 0$, per tutto il resto dell'esercizio. Verificare che $\dim U = 3$ e trovare una base di U.

(c) Sia $W \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio di equazioni $x_1 = 0$, $x_2 = 0$. Trovare una base di W e una base di $U \cap W$.

(d) Esiste una funzione lineare $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tale che $f(U) = W$? Se una tale f esiste è possibile che sia iniettiva?

Esercizio 2. Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la funzione lineare definita da

$$f(x, y, z) = (x - 2y - z, -x + 2z, 2x - 6y - z).$$

(a) Scrivere la matrice A di f rispetto alla base canonica.

(b) Ridurre A in forma a scala e trovare una matrice invertibile R tale che la matrice $A' = RA$ sia una forma a scala di A.

(c) Trovare una base di $\operatorname{Ker} f$ e di $\operatorname{Im} f$.

(d) Scrivere la matrice B di f rispetto alla base formata dai vettori $v_1 = (1, 0, 1)$, $v_2 = (0, 1, -1)$, $v_3 = (0, 0, 1)$ (usiamo questa base sia nel dominio che nel codominio di f).

Esercizio 3. Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & t & 2 \end{pmatrix}$$

(a) Ridurre A in forma a scala e determinare il suo rango al variare di $t \in \mathbb{R}$.

(b) Consideriamo il vettore colonna $B_1 = (3, -1, 4, 2)$. Esiste un valore di t per il quale il sistema $AX = B_1$ ha soluzione?

(c) Poniamo ora $t = 2$. Determinare l'insieme S delle soluzioni del sistema $AX = B_2$, ove $B_2 = (2, -3, 0, -2)$. L'insieme S così trovato è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$?

ESERCIZIO 1.

SOLUZIONE.

(a) Costruiamo la matrice A le cui **righe** sono i vettori $u_1, \dots, u_4$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & -4 & -1 & 4 \\ 2 & -6 & 1 & t \end{pmatrix}$$

e cominciamo a mettere A in forma a scala mediante *operazioni elementari sulle righe.* Otteniamo

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & t-1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Se $t \neq 1$, A' è a scala con 3 righe non nulle, quindi $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} A' = 3$. Se $t = 1$, A' è a scala con 2 righe non nulle, quindi $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} A' = 2$. Ricordo che agendo con operazioni elementari sulle righe il sottospazio generato dalle righe non cambia. Quindi $\dim U = 3$ se $t \neq 1$, $\dim U = 2$ se $t = 1$.

Posso aggiungere che le righe non nulle di A' formano una base di U, quindi se $t = 1$ allora $\{u_1, u_2\}$ è base di U. Se invece $t \neq 1$ allora $\{u_1, u_2, (0, 0, 0, t-1)\}$ è base di U, ma posso prendere come base di U anche $\{u_1, u_2, (0, 0, 0, 1)\}$.

(b) D'ora in poi poniamo $t = 0$. Per il punto (a) (ma posso eseguire nuovamente il processo di riduzione a acala di A ponendo $t = 2$), U ha dimensione 3 ed una base di U è $\{u_1, u_2, (0, 0, 0, 1)\}$.
Alternativa. Si ha $3u_1 - 2u_2 = u_3$ (come si deduceva mettendo A in forma a scala), quindi u_3 si può rimouvere dal sistema di generatori $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$, ottenendo il sistema di generatori $\{u_1, u_2, u_4\}$ di U. Ma $\dim U = 3$, quindi $\{u_1, u_2, u_4\}$ è base di U.

(c) W è il nucleo dalla funzione lineare suriettiva $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$, $(x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto (x_1, x_2)$, quindi $\dim W = 4 - 2 = 2$. Una base di W è $\{w_1, w_2\}$ con $w_1 = (0, 0, 1, 0)$, $w_2 = (0, 0, 0, 1)$. Per trovare una base di $U \cap W$, scriviamo gli elementi di U come combinazione lineare di elementi di una base di U e poi imponiamo la condizione di appartenenza a W.

Utilizzando la base $\{u_1, u_2, (0, 0, 0, 1)\}$, gli elementi di U si scrivono in modo unico come

$$u = \lambda_1(1, 0, -1, 2) + \lambda_2(0, 2, -1, 1) + \lambda_3(0, 0, 0, 1)$$

$$u = (\lambda_1, 2\lambda_2, -\lambda_1 - \lambda_2, 2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)$$

$$U : \begin{cases} x_1 &= \lambda_1 \\ x_2 &= 2\lambda_2 \\ x_3 &= -\lambda_1 - \lambda_2 \\ x_4 &= 2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \end{cases} \qquad \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$$

Imponendo $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ si trova $\lambda_1 = 0$, $2\lambda_2 = 0$, ossia $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$. Quindi

$$U \cap W : \begin{cases} x_1 &= 0 \\ x_2 &= 0 \\ x_3 &= 0 \\ x_4 &= \lambda_3 \end{cases} \qquad \lambda_3 \in \mathbb{R}$$

quindi $U \cap W$ ha dimensione 1 ed una sua base è $\{(0, 0, 0, 1)\}$.

(d) Una tale funzione esiste. Partiamo da una base di U ed estendiamo ad una base di $\mathbb{R}^4$. Ad esempio parto da $\{u_1, u_2, (0, 0, 0, 1)\}$ base di U ed estendo a $\{u_1, u_2, (0, 0, 0, 1), v\}$ base di $\mathbb{R}^4$ (non è necessario esisbire esplicitamente v). Definiamo $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ ponendo ad esempio

$$f(u_1) = w_1, f(u_2) = w_2, f((0, 0, 0, 1)) = (0, 0, 0, 0), f(v) = (0, 0, 0, 0)$$

ed estendendo per linearità a tutto $\mathbb{R}^4$ (vedi il teorema). Questa f soddisfa la condizione richiesta: $f(U) = W$.

La f costruita è solo una delle varie funzioni lineari che soddisfano $f(U) = W$. Sia F una qualunque funzione lineare $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ che soddisfi $F(U) = W$. Allora F non può essere iniettiva, in quanto una funzione lineare iniettiva manda insiemi linearmente indipendenti in insiemi linearmente indipendenti. In particolare se F fosse iniettiva si avrebbe $\dim F(U) = \dim U$, ma $\dim U = 3$ mentre $\dim W = 2$.

ESERCIZIO 2.

SOLUZIONE.

(a) La matrice A è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & -6 & -1 \end{pmatrix}$$

Infatti poiché stiamo usando la base canonica nel dominio e nel codominio, la **prima riga** di A è data dai coefficienti di $x-2y-z$, la seconda riga di A è data dai coefficienti di $-x+2z$, la terza riga di A è data dai coefficienti di $2x-6y-z$.

Alternativa. Sia $\{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonica di $\mathbb{R}^3$. Calcolo $f(e_1)$, $f(e_2)$, $f(e_3)$ e li esprimo come cobinazioni lineari di e_1, e_2, e_3.

$$f(e_1) = f(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = e_1 - e_2 + 2e_3,$$

$$f(e_2) = f(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix} = -2e_1 + 0e_2 - 6e_3,$$

$$f(e_3) = f(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = -e_1 + 2e_2 - e_3,$$

(b) Per trovare sia una forma a scala A' di A sia la matrice R, affianchiamo ad A la matrice identica: mettiamo A in forma a scala, ma agiamo su $(A|I)$

$$(A|I) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & | & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & | & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -6 & -1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Arriviamo a

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & | & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & -3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

quindi

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

è una forma a scala di A (in particolare $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} A' = 2$ perché A' ha due righe non nulle) ed

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(c) Abbiamo $\dim \operatorname{Im} f = \operatorname{rg} A = 2$ e per base di $\operatorname{Im} f$ posso prendere l'insieme costituito da due **colonne linearmente indipendenti di** A (non di A'). Osservo che i pivot di A' sono nella prima e nella seconda colonna di A', quindi le prime due colonne di A sono linearmente indipendenti e pertanto formano una base di $\operatorname{Im} f$ (se non voglio utilizzare la posizione dei pivot, devo verificare che le prime due colonne di A sono linearmente indipendenti). Una base di $\operatorname{Im} f$ è

$$\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix}\}$$

Si ha $\dim ker\, f = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \operatorname{Im} f = 3 - 2 = 1$. Per determinare una base di $ker\, f$ risolvo

$$\begin{cases} x - 2y - z & = 0 \\ -x + 2z & = 0 \\ 2x - 6y - z & = 0 \end{cases}$$

o direttamente il sistema lineare omogeneo associato ad A'

$$\begin{cases} x - 2y - z & = 0 \\ -x + 2z & = 0 \end{cases}$$

So che ho bisogno di 1 parametro, e posso porre $z = s$, da cui $x = 2z = 2s$, $2y = x - z = 2s - s = s$, $y = \frac{1}{2}s$:

$$ker\, f = ker\, A = ker\, A' : \begin{cases} x & = 2s \\ y & = \frac{1}{2}s \\ z & = s \end{cases} \quad s \in \mathbb{R}$$

Ponendo $s = 2$ trovo $v = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $\{v\}$ è base di $ker\, f$.

(d) Calcolo $f(v_1)$, $f(v_2)$, $f(v_3)$ e li esprimo come combinazioni lineari di v_1, v_2, v_3. Si ha

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_1 - a_2 + a_3 \end{pmatrix} \quad a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$$

e

$$f(v_1) = f(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0v_1 + 1v_2 + 2v_3$$

$$f(v_2) = f(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix} = -1v_1 - 2v_2 - 6v_3$$

$$f(v_3) = f(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = -1v_1 + 2v_2 + 2v_3$$

quindi

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -6 & 2 \end{pmatrix}$$

Alternativa. Indico con P la matrice del cambio di base:

$$\underline{e} = \{e_1, e_2.e_3\} \quad , \quad \underline{v} = \{v_1, v_2, v_3\}$$

$$P = M^{\underline{e}}_{\underline{v}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Allora

$$B = M^{\underline{v}}_{\underline{v}}(f) = M^{\underline{v}}_{\underline{e}}(\mathrm{id}) M^{\underline{e}}_{\underline{e}}(f) M^{\underline{e}}_{\underline{v}}(\mathrm{id}) = P^{-1}AP$$

Devo calcolare P^{-1}. Si ha

$$a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 = \left(\begin{smallmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_1 - a_2 + a_3 \end{smallmatrix}\right) \qquad a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$$

e

$$e_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) = 1v_1 + 0v_2 - 1v_3$$

$$e_2 = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) = 0v_1 + 1v_2 + 1v_3$$

$$e_3 = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) = 0v_1 + 0v_2 + 1v_3$$

quindi

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ed infine

$$B = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -6 & 2 \end{pmatrix}$$

ESERCIZIO 3.

SOLUZIONE.

(a) Cominciamo a mettere A in forma a scala mediante *operazioni elementari sulle righe.* Partendo da

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & t & 2 \end{pmatrix}$$

arriviamo ad

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & t-2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Se $t \neq 2$, A' è a scala con 3 righe non nulle, quindi $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} A' = 3$. Se $t = 2$, A' è a scala con 2 righe non nulle, quindi $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} A' = 2$.

(b) Cominciamo a mettere $(A|B_1)$ in forma a scala mediante *operazioni elementari sulle righe.* Partendo da

$$(A|B_1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & | & 3 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & | & -1 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & | & 4 \\ 2 & 2 & t & 2 & | & 2 \end{pmatrix}$$

arriviamo a

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & | & 3 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & | & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & -3 \\ 0 & 0 & t-2 & 0 & | & -2 \end{pmatrix}$$

Arrivati a questo punto già possiamo concludere. Infatti la terza equazione è

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = -3$$

che non ha soluzioni, indipendentemente da t. Pertanto il sistema $AX = B_1$ non ha soluzioni, per nessun valore di t.

Alternativa. Facciamo un ulteriore passaggio, scambiando la terza e la quarta riga tra loro, arriviamo a

$$(A'|B_1') = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & | & 3 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & | & -1 \\ 0 & 0 & t-2 & 0 & | & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & -3 \end{pmatrix}$$

Se $t \neq 2$, A' è a scala con 3 righe non nulle, quindi $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} A' = 3$, mentre $(A'|B_1')$ è a scala con 4 righe non nulle, quindi $\operatorname{rg}(A|B_1) = \operatorname{rg}(A'|B_1') = 4$.

Se $t = 2$, A' è a scala con 2 righe non nulle, quindi $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} A' = 2$, mentre

$$(A'|B_1') = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & | & 3 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & | & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & -3 \end{pmatrix}$$

ha rango 3 (non è a scala, ma le prime 3 righe formano una matrice a scala con 3 righe non nulle, e l'ultima riga è multipla della terza riga). In entrambi i casi, per il teorema di Rouché-Capelli, il sistema lineare $AX = B_1$ non ha soluzioni. Pertanto il sistema $AX = B_1$ non ha soluzioni, per nessun valore di t.

(c) Mettiamo $(A|B_2)$ in forma a scala mediante *operazioni elementari sulle righe*. Partendo da

$$(A|B_2) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & | & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & | & -3 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & | & 0 \\ 2 & 2 & t & 2 & | & -2 \end{pmatrix}$$

arriviamo a

$$(A'|B_2') = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & | & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & | & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice A' è a scala con 2 righe non nulle, quindi $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} A' = 2$, $(A'|B_2')$ è a scala con 2 righe non nulle, quindi $\operatorname{rg}(A|B_2) = \operatorname{rg}(A'|B_2') = 2$. Per il teorema di Rouché-Capelli, il sistema lineare $S : AX = B_2$ ha soluzioni, e ci sono $\infty^{4-2} = \infty^2$ soluzioni, essendo $n = 4$ numero delle incognite (è il numero di colonne di A) ed $r = 2$, il rango di A uguale al rango di $(A|B_2)$.

Il sistema lineare di matrice completa $(A'|B_2')$ ha equazioni

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \qquad + 2x_4 & = 2 \\ \qquad 2x_2 + x_3 - x_4 & = -3 \end{cases}$$

e so già che ho bisogno di 2 parametri per derscrive l'insieme delle soluzioni $\operatorname{Sol} S$ di S. Posso porre $x_2 = s$, $x_4 = t$. Dalla seconda equazione ricavo $x_3 = -3 - 2x_2 + x_4 = -3 - 2s + t$. Dalla prima equazione ricavo $x_1 = 2 + x_2 - 2x_4 = 2 + s - 2t$

$$\operatorname{Sol} S : \begin{cases} x_1 & = 2 + s - 2t \\ x_2 & = s \\ x_3 & = -3 - 2s + t \\ x_4 & = t \end{cases} \qquad s, t \in \mathbb{R}$$

Infine $\operatorname{Sol} S$ non è sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ in quanto S non è omogeneo (in altre parole, il vettore nullo $(0,0,0,0)$ non appartiene a $\operatorname{Sol} S$).