ESERCIZIO 1.

SOLUZIONE.

(a) V è il nucleo dell'applicazione lineare suriettiva $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, $(x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto x_1 - 2x_3$, quindi $\dim V = \dim ker\, f = 4 - 1 = 3$. Possiamo far variare liberamente x_2, x_3, x_4: una base è

$$\{(2, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 1)\}$$

(b) Sia A la matrice le cui righe sono u_1, u_2, u_3:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 \\ -4 & 4 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Una sua forma a scala è ad esempio

$$A' = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

che ha due righe non nulle, quindi rango due. Pertanto $\dim U = 2$ ed una sua base è $\{(2, -1, 1, 2), (0, 2, 0, 1)\}$. Entrambi questi vettori soddisfano la condizione $x_1 - 2x_3 = 0$, quindi U è contenuto in V.

(c) Essendo $\dim V = 3$, $\dim U = 2$, L ha dimensione $3 - 2 = 1$. Per trovare una base di L, dobbiamo prendere un qualunque vettore di V non contenuto in U. Ad esempio $(0, 0, 0, 1) \in V \setminus U$, in quanto $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ha rango 3. Quindi $L =< (0, 0, 0, 1) >$ va bene. L non è unico. Ad esempio anche $L =< (0, 1, 0, 0) >$ va bene, in quanto $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, una cui forma a scala è $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, ha rango 3.

(d) La matrice dei coefficienti ha rango 2, quindi $\dim W = 4 - 2 = 2$. Il generico elemento di U è della forma $u = \lambda_1(2, -1, 1, 2) + \lambda_2(0, 2, 0, 1)$. Imponendo le condizioni di appartenza a W, $x_1 - x_2 + x_3 = 0$, $x_2 + x_3 - x_4 = 0$, si ottiene $4\lambda_1 - 2\lambda_2 = 0$, $-2\lambda_1 + \lambda_2 = 0$, ossia $\lambda_2 = 2\lambda_1$. Quindi $U \cap W = \{\lambda_1(2, -1, 1, 2) + 2\lambda_1(0, 2, 0, 1) \mid \lambda_1 \in \mathbb{R}\}$ ha dimensione 1, ed una sua base è, per $\lambda_1 = 1$, $\{v\}$, con $v = (2, 3, 1, 4)$. Per la formula di Grassmann

$$\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W) = 2 + 2 - 1 = 3$$

Per trovare una base di $U + W$ parto da $\{v\}$ e completo a basi di U e di W. Ad esempio $\{v, u_1\}$ è base di U e $\{v, (0, 1, 1, 2)\}$ è base di W. Quindi $\{v, u_1, (0, 1, 1, 2)\}$ è base di $U + W$.

ESERCIZIO 2.

SOLUZIONE.

(a) Sia $\{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonica di $\mathbb{R}^3$. Dobbiamo calcolare $f(e_1)$, $f(e_2)$ ed $f(e_3)$. Ora $e_1 = \frac{1}{2}((1,-1,0)+(1,1,0))$, quindi

$$f(e_1) = \frac{1}{2}(f(1,-1,0)+f(1,1,0)) = \frac{1}{2}((1,-1,0,-1)+(3,3,-4,1)) = (2,1,-2,0)$$

Inoltre $e_2 = \frac{1}{2}((1,1,0)-(1,-1,0))$, quindi

$$f(e_2) = \frac{1}{2}(f(1,1,0)-f(1,-1,0)) = \frac{1}{2}((3,3,-4,1)-(1,-1,0,-1)) = (1,2,-2,1)$$

Infine $e_3 = (0,-1,1)+e_2$, quindi

$$f(e_3) = f(0,-1,1)+f(e_2) = (0,-6,4,-4)+(1,2,-2,1) = (1,-4,2,-3)$$

A è la matrice le cui colonne sono $f(e_1)$, $f(e_2)$, $f(e_3)$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -4 \\ -2 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

(b) Una forma a scala di A è

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

che ha due righe non nulle, quindi rango due. Pertanto $\dim Im\, f = 2$ e $\dim ker\, f = 3-2 = 1$. Una base di $Im\, f$ è costituita dalle prime due colonne di A (in base alla posizione dei pivot di A'). Per calcolare una base di $ker\, f$, risolviamo il sistema lineare corrispondente ad A'. Si trova la base $\{(-2,3,1)\}$ di $ker\, f$.

(c) Abbiamo la base $\{(2,1,-2,0),(1,2,-2,1)\}$ di $Im\, f$. Risolviamo

$$\lambda_1(2,1,-2,0)+\lambda_2(1,2,-2,1) = (6,-3,-2,\alpha)$$

ossia $2\lambda_1+\lambda_2 = 6$, $\lambda_1+2\lambda_2 = -3$, $-2\lambda_1-2\lambda_2 = -2$, $\lambda_2 = \alpha$. Dalle prime 3 equazioni si ricave $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = -4$, e la quarta quindi dice che $\alpha = -4$.

(d) La condizione equivale a $Im\, g \leq ker\, f$. Ma sappiamo che $ker\, f$ ha per base $\{v\}$, con $v = (-2, 3, 1)$. Pertanto g deve essere della forma $g(e_1) = \alpha_1 v$, $g(e_2) = \alpha_2 v$, $g(e_3) = \alpha_3 v$, dove α_1, α_2, α_3 sono liberi di variare in $\mathbb{R}$. Quindi la dimensione di U è 3, ed una base di U, in termini di matrici, è costituita da

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ESERCIZIO 3.

SOLUZIONE.

(a)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ \alpha & 1-\alpha & -\alpha \\ -\alpha & \alpha-1 & \alpha \end{pmatrix}$$

Sostituendo alla terza riga la somma della terza e della seconda riga, si ottiene

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ \alpha & 1-\alpha & -\alpha \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

che ha una riga nulla. Quindi A ha rango minore di 3, indipendentemente di α. Pertanto A non è mai invertibile.

(b) Si tratta di calcolare il determinante di

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 & -1 \\ \alpha & 1-\alpha-\lambda & -\alpha \\ -\alpha & \alpha-1 & \alpha-\lambda \end{pmatrix}$$

Possiamo agire con operazioni elementari sulle righe e sulle colonne:

$$A - \lambda I \to \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 & -1 \\ \alpha & 1-\alpha-\lambda & -\alpha \\ 0 & -\lambda & -\lambda \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 \\ \alpha & 1-\alpha-\lambda & -1+\lambda \\ 0 & -\lambda & 0 \end{pmatrix}$$

e sviluppando secondo la terza colonna (o la terza riga) si ottiene $p_A(\lambda) = -\lambda(\lambda-1)^2$, che risulta essere indipendente da α. Gli autovalori sono $\lambda = 0$, con molteplicità algebrica 1, e $\lambda = 1$, con molteplicità algebrica 2.

(c) Sia $\lambda = 0$. Allora $E_A(0) = ker\, A$. Una forma a scala di A è

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

che ha rango 2, quindi $\dim E_A(0) = 3 - 2 = 1$ (come doveva essere). Una base è $\{v\}$, con $v = (1, 0, 1)$ (indipendentemente da α).

Sia $\lambda = 1$. Allora $E_A(1) = ker(A - I)$.

$$A - I = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ \alpha & -\alpha & -\alpha \\ -\alpha & \alpha-1 & \alpha-1 \end{pmatrix}$$

Mettiamo al posto della terza riga, la terza più la seconda

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ \alpha & -\alpha & -\alpha \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

ed al posto della terza, la terza meno la prima

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ \alpha & -\alpha & -\alpha \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Al contrario del caso $\lambda = 0$, qui la discussione dipende da α. Se $\alpha \neq 0$, allora possiamo dividere per α, ed arriviamo alla matrice a scala

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

che ha rango 2. Quindi, se $\alpha \neq 0$ si ha $\dim E_A(1) = 3 - 2 = 1$. In particolare A non è diagonalizzabile, in quanto $m_a(1) = 2$ mentre $m_g(1) = 1$. Una base di $E_A(1)$ è data da $\{w\}$, dove $w = (0, 1, -1)$.

Sia infine $\alpha = 0$. Allora B diventa

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

che ha rango 1. Quindi, se $\alpha = 0$ si ha $\dim E_A(1) = 3 - 1 = 2$. In particolare A è diagonalizzabile, in quanto $m_a(1) = 2 = m_g(1)$. Una base di $E_A(1)$ è data da $\{w_1, w_2\}$, dove $w_1 = (0, 1, -1)$, $w_2 = (1, 0, 0)$.

(d) Per $\alpha = 0$ sappiamo che A è diagonalizzabile e che gli autovalori sono 0 con molteplicità 1 ed 1 con molteplicità 2. Esiste quindi una matrice invertibile P tale che

$$PAP^{-1} = D, D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Prendendo la trasposta otteniamo

$$(PAP^{-1})^T = D^T, \quad (P^{-1})^T A^T P^T = D^T = D$$

in quanto D è diagonale. Pertanto entrambe A ed A^T sono simili a D, da cui segue che A ed A^T sono simili.

Osserviamo che non basta dire che A ed A^T hanno lo stesso determinante, rango, polinomio caratteristico per affermare che A ed A^T sono simili. Ad esempio $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ hanno lo stesso determinante, lo stesso rango, lo stesso polinomio caratteristico, ma non sono simili.

ESERCIZIO 4.

SOLUZIONE.

(a) La retta r è parallela al vettore $v_r = (1, -2, -3)$ che si ottiene risolvendo il sistema omogeneo associato

$$\begin{cases} 2x + y & = 0 \\ x - y + z & = 0 \end{cases}$$

Il piano cercato ha equazione del tipo $\pi : x - 2y - 3z = d$ ed imponendo la condizione $P \in \pi$ si trova $d = 9$:

$$\pi : x - 2y - 3z = 9$$

(b) Indichiamo con H la proiezione ortogonale di P su r. Poiché r è ortogonale a π, H è dato dalla intersezione $r \cap \pi$. Risolvendo

$$r \cap \pi : \begin{cases} 2x + y & = 2 \\ x - y + z & = 3 \\ x - 2y - 3z & = 9 \end{cases}$$

si trova $H = (2, -2, -1)$.

Infine $d(P, r) = d(P, H)$, $P - H = (1, -1, 1)$, $d(P, H) = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{3}$.

(c) La retta s è parallela al vettore $v_s = (2, -3, -1)$. I vettori v_r e v_s non sono uno multiplo dell'altro, quindi le due rette non sono parallele. Vediamo se sono incidenti. Ricordiamo che

$$r : \begin{cases} 2x + y & = 2 \\ x - y + z & = 3 \end{cases}$$

Abbiamo equazioni parametriche di s. Intersecando r con s troviamo

$$r \cap s : \begin{cases} 2(2 + 2t) + (-3t) & = 2 \\ (2 + 2t) - (-3t) + (1 - t) & = 3 \end{cases}$$

La prima equazione ha per soluzione $t = -2$, la seconda $t = 0$. Quindi il sistema non ha soluzione, ed r ed s non sono incidenti. Pertanto r ed s sono sghembe.

(d) Sia σ il piano per r ed A. Il fascio di piani per r ha equazione

$$\alpha(2x + y - 2) + \beta(x - y + z - 3) = 0$$

Imponendo il passaggio per A, si trova $\sigma : 9x + 3y + z = 11$. Intersecando σ con s si trova

$$9(2 + 2t) + 3(-3t) + (1 - t) = 11$$

$t = -1$, $\sigma \cap s = \{S\}$, $S = (0, 3, 2)$. La retta richiesta è $\ell = S + < S - A >$. Quindi ℓ ha equazioni parametriche

$$\ell : \begin{cases} x = -t \\ y = 3 + t \\ z = 2 + 6t \end{cases}$$

al variare di t in $\mathbb{R}$. Si ha $\ell \cap s = \{S\}$. Resta da calcolare $r \cap \ell$:

$$r \cap \ell : \begin{cases} 2(-t) + (3 + t) & = 2 \\ (-t) - (3 + t) + (2 + 6t) & = 3 \end{cases}$$

$t = 1$, $r \cap \ell = \{R\}$, $R = (-1, 4, 8)$.