

Analisi stocastica - Programma del corso

1. **Nozioni introduttive.** Gli spazi misurabili $(\mathbb{R}^I, \mathcal{B}(\mathbb{R}^I))$. Il Teorema di estensione di Kolmogorov. Processi Gaussiani e loro proprietà.

Dimostrazioni.

- Se $X_n \sim N(0, \sigma_n^2)$ e $X_n \rightarrow X$ in distribuzione, allora $X \sim N(0, \sigma^2)$ con $\sigma = \lim_n \sigma_n$.

2. **Moto Browniano.** Definizione di Moto Browniano. Caratterizzazione del Moto Browniano come processo Gaussiano. Proprietà di invarianza del Moto Browniano. Variazione Quadratica del Moto Browniano. Legge del logaritmo iterato. Costruzione di Levy del Moto Browniano. Filtrazione generata dal moto Browniano. Moto Browniano multidimensionale. La misura di Wiener.

Dimostrazioni.

- La variazione quadratica del Moto Browniano come limite in L^2 .
- Costruzione di Levy del Moto Browniano.

3. **Filtrazioni e processi di Levy.** Modificazioni. Indistinguibilità. Misurabilità. Filtrazioni e assunzioni standard. Processi adattati e progressivamente misurabili. Processi di Levy. Legge 0-1 di Blumenthal. Tempi d'arresto. Tempi d'ingresso come tempi d'arresto. La proprietà di Markov forte per processi di Levy. Il principio di riflessione.

Dimostrazioni.

- Legge 0-1 di Blumenthal (inclusa la dimostrazione che un processo di Levy per una data filtrazione lo è anche per una opportuna estensione).
- La proprietà di Markov forte per processi di Levy.

4. **Martingale.** Martingale, supermartingale e submartingale in tempo discreto e continuo. Il teorema d'arresto. La disuguaglianza massimale. Variazione quadratica.

Dimostrazioni.

- La disuguaglianza massimale.

5. **L'integrale stocastico.** Gli spazi $M^2[a, b]$ e $\mathcal{S}[a, b]$. L'integrale stocastico in $\mathcal{S}[a, b]$. Densità di $\mathcal{S}[a, b]$. L'integrale stocastico in $M^2[a, b]$. L'integrale stocastico come martingala continua. Località dell'integrale stocastico. L'integrale stocastico in M_{loc}^2 e le sue proprietà. Martingale locali. L'integrale stocastico in M_{loc}^2 come martingala locale.

Dimostrazioni.

- Densità di $\mathcal{S}[a, b]$.
- L'integrale stocastico in $M^2[a, b]$.
- L'integrale stocastico è una martingala di quadrato integrabile con una modificazione continua

6. **Il calcolo stocastico.** Formula di Ito per il Moto Browniano. Processi di Ito e Formula di Ito generale. Il caso multidimensionale. Il Teorema di Girsanov.

Dimostrazioni.

- La formula di Ito per il Moto Browniano, solo per funzioni $\mathcal{C}^2$ con derivata seconda limitata.
- Il Teorema di Girsanov, solo con l'assunzione di uniforme limitatezza del processo progressivamente misurabile che appare nella martingala esponenziale.

7. **Equazioni differenziali stocastiche.** Definizioni di soluzione e soluzione forte. Esistenza e unicità con condizioni di Lipschitz e crescita lineare. Esistenza di soluzioni con drift limitato, via Teorema di Girsanov.

Dimostrazioni.

- Esistenza e unicità con condizioni di Lipschitz e crescita lineare.