Probabilità e Statistica

Prof. P.Dai Pra, prova scritta 16/07/2003.

Cognome:

Nome:

Matricola:

Firma:

Corso di Studi in Informatica

Corso di Studi in Matematica

I diritti d'autore sono riservati. Ogni sfruttamento commerciale non autorizzato sarà perseguito.

ESERCIZIO 1. In questo esercizio analizziamo, con metodi probabilistici, quanto bene la serie esponenziale troncata

$$e_n = \sum_{k=0}^n \frac{n^k}{k!}$$

approssimi $e^n = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{n^k}{k!}$, per valori grandi di n .

- Sia $X_n \sim Po(n)$. Esprimere $P(X_n \leq n)$ in termini di e_n e e^n .
- Usando il Teorema del Limite Centrale, mostrare che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n \leq n) = \frac{1}{2}.$$

(ricordare che se $(Y_k)_{k \geq 1}$ è una successione di variabili casuali i.i.d. con distribuzione $Po(1)$, allora $\sum_{k=1}^n Y_k$ e X_n hanno la stessa distribuzione).

- Usare quanto mostrato in a. e b. per concludere

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^n}{e_n} = 2.$$

Dunque e_n non è affatto una buona approssimazione di e^n , mentre $2e_n$ lo è.

Soluzione. a.

$$P(X_n \leq n) = \sum_{k=0}^n P(X_n = k) = e^{-n} \sum_{k=0}^n \frac{n^k}{k!} = \frac{e_n}{e^n}.$$

b. Si noti che X_n ha la stessa distribuzione di $Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n$, dove le Y_i hanno distribuzione $Po(1)$ e sono indipendenti. Allora

$$P(X_n \leq n) = P((\bar{Y}_n - 1)\sqrt{n} \leq 0).$$

Per il Teorema del Limite Centrale

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P((\bar{Y}_n - 1)\sqrt{n} \leq 0) = P(Z \leq 0) = \frac{1}{2},$$

dove $Z \sim N(0, 1)$.

c. Ovvio.

ESERCIZIO 2 Sia Y un numero casuale con distribuzione uniforme in $[0, 1]$. Supponiamo di volere, dopo aver generato Y , generare un nuovo numero casuale W scelto con distribuzione uniforme tra Y e 1. Per fare cio', generiamo un numero casuale $X \sim U(0, 1)$ indipendente da Y , e poniamo

$$W = XY + 1 - X.$$

- Determinare la densita' congiunta di (Y, W) .
- Determinare la densita' di W .
- *. Calcolare il coefficiente di correlazione $\rho_{Y,W}$.

Soluzione. a. Si scriva

$$(Y, W) = \varphi(Y, X),$$

dove

$$\varphi(y, x) = (y, xy + 1 - x).$$

Si vede che

$$\varphi^{-1}(y, w) = \left(y, \frac{1-w}{1-y} \right).$$

Essendo

$$|\det D\varphi^{-1}(y, w)| = \frac{1}{|1-y|},$$

si ha

$$\begin{aligned} f_{Y,W}(y, w) &= f_{Y,X}(\varphi^{-1}(y, w)) |\det D\varphi^{-1}(y, w)| \\ &= 1_{[0,1]}(y) 1_{[0,1]} \left(\frac{1-w}{1-y} \right) \frac{1}{1-y} = 1_{[0,1]}(y) \frac{1}{1-y} 1_{[y,1]}(w). \end{aligned}$$

b.

$$f_W(w) = \int f_{Y,W}(y, w) dy = 1_{[0,1]}(w) \int_0^w \frac{1}{1-y} dy = -\log(1-w) 1_{[0,1]}(w).$$

c. Anzitutto

$$E(YW) = \int yw f_{Y,W}(y, w) dy dw = \int_0^1 \left(\int_y^1 w dw \right) \frac{y}{1-y} dy = \dots = \frac{5}{12}.$$

Per calcolare $E(W)$ usiamo ancora la densita' congiunta invece della marginale f_W (i calcoli sono un po' piu' semplici):

$$E(W) = \int w f_{Y,W}(y, w) dy dw = \int_0^1 \left(\int_y^1 w dw \right) \frac{1}{1-y} dy = \dots = \frac{3}{4}.$$

Infine, sappiamo che $E(Y) = \frac{1}{2}$. Percio'

$$\text{Cov}(Y, W) = E(YW) - E(Y)E(W) = \frac{1}{24}.$$

Inoltre

$$E(W^2) = \int w^2 f_{Y,W}(y, w) dy dw = \int_0^1 \left(\int_y^1 w^2 dw \right) \frac{1}{1-y} dy = \dots = \frac{11}{18}.$$

Da cio'

$$Var(W) = E(W^2) - [E(W)]^2 = \frac{7}{144}.$$

Essendo $Var(Y) = \frac{1}{12}$, si conclude che

$$\rho_{Y,W} = \frac{Cov(Y, W)}{\sqrt{Var(Y)Var(W)}} = \sqrt{\frac{3}{7}}.$$

ESERCIZIO 3. In una popolazione di batteri, il 68% degli individui e' di genotipo AA . E' stato scoperto che gli individui di genotipo AA hanno probabilita' 0.03 di sopravvivere all'azione di un certo antibiotico, mentre per tutti gli altri tale probabilita' e' 0.1.

a. Qual e' la probabilita' che un individuo scelto a caso nella popolazione sopravviva all trattamento antibiotico?

b. Sapendo che un certo individuo e' sopravvissuto al trattamento, con quale probabilita' e' di genotipo AA ?

c. Si scelgano, a caso, 100 individui sopravvissuti al trattamento antibiotico. Qual e' la probabilita' che oltre 42 di essi siano di genotipo AA (usare l'approssimazione normale)?

Soluzione. a. Sia $A =$ "il batterio e' di genotipo AA ", e $B =$ "il batterio sopravvive al trattamento antibiotico.

$$P(B) = P(B|A)P(A) + P(B|A^c)P(A^c) = 0.03 \times 0.68 + 0.1 \times 0.32 = 0.0524.$$

b.

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)} = \frac{0.03 \times 0.68}{0.0524} \simeq 0.389.$$

c. Sia X_i la variabile casuale che vale 1 se l' i -mo individuo scelto e' di genotipo AA , e 0 altrimenti. Si ha che $X_i \sim Be(0.389)$. Allora

$$\begin{aligned} P\left(\sum_{i=1}^{100} X_i \geq 42\right) &= P\left(\frac{\bar{X}_{100} - 0.389}{\sqrt{0.389(1-0.389)}} 10 \geq \frac{0.42 - 0.389}{\sqrt{0.389(1-0.389)}} 10\right) \\ &\simeq 1 - \Phi\left(\frac{0.42 - 0.389}{\sqrt{0.389(1-0.389)}} 10\right) \simeq 0.26 \end{aligned}$$

ESERCIZIO 4. Dimostrare che le seguenti affermazioni sono equivalenti:

- i) Gli eventi A e B sono indipendenti.
- ii) Le variabili casuali 1_A e 1_B sono indipendenti.
- iii) Le variabili casuali 1_A e 1_B sono scorrelate (cioe' $Cov(1_A, 1_B) = 0$).

Soluzione.

i) $\Rightarrow$ ii) Dimostriamo che la densita' congiunta e' il prodotto delle densita' marginali.

$$\begin{aligned} P(1_A = 1, 1_B = 1) &= P(A \cap B) = (\text{ per l'indipendenza }) \\ &= P(A)P(B) = P(1_A = 1)P(1_B = 1). \end{aligned}$$

Analogamente:

$$P(1_A = 0, 1_B = 1) = P(A^c \cap B) = P(A^c)P(B) = P(1_A = 0)P(1_B = 1),$$

e allo stesso modo negli altri casi.

ii) $\Rightarrow$ iii) E' una proprieta' generale.

iii) $\Rightarrow$ i) Si noti che

$$E(1_A 1_B) = E(1_{A \cap B}) = P(A \cap B),$$

e

$$E(1_A)E(1_B) = P(A)P(B).$$

Sicche':

$$0 = Cov(1_A, 1_B) = E(1_A 1_B) - E(1_A)E(1_B) = P(A \cap B) - P(A)P(B),$$

da cui segue la conclusione.