Prova scritta di Probabilità e Statistica	Cognome: ______________
Laurea in Matematica	Nome: ______________
16 settembre 2011	Matricola: ______________

ESERCIZIO 1. In quanto segue, per $A \subseteq \mathbb{R}^2$ e $y \in \mathbb{R}$, sia $A_y := \{x \in \mathbb{R} : (x, y) \in A\}$.

(a) Siano X e Y due variabili aleatorie a valori in $\mathbb{R}$, discrete e indipendenti. Si mostri che, per ogni $A \subseteq \mathbb{R}^2$ e $y \in \mathbb{R}$ tale che $P(Y = y) > 0$, si ha

$$P((X, Y) \in A | \{Y = y\}) = P(X \in A_y). \tag{1}$$

(b) Siano $W, Z \sim Po(1)$ indipendenti. Si ponga $Y := Z$, $X := W + Z$, $A := \{(0, 0)\}$, $y = 0$. Mostrare che l'identità (1) non vale, e si spieghi perché ciò non contraddice quanto visto al punto precedente.

SOLUZIONE.

(a)

$$\begin{aligned} P((X, Y) \in A | \{Y = y\}) = \frac{P(\{(X, Y) \in A\} \cap \{Y = y\})}{P(Y = y)} &= \frac{P(\{(X, y) \in A\} \cap \{Y = y\})}{P(Y = y)} \\ &= \frac{P(\{X \in A_y\} \cap \{Y = y\})}{P(Y = y)} = P(X \in A_y). \end{aligned}$$

(b)

$$P((X, Y) \in \{(0, 0)\} | \{Y = 0\}) = \frac{P(W = 0, Z = 0)}{P(Z = 0)} = e^{-1},$$

mentre

$$P(X \in A_0) = P(X = 0) = e^{-2}.$$

Non vi è contraddizione con il punto precedente, in quanto X e Y non sono indipendenti.

ESERCIZIO 2. Antonio e Berta si incontrano per una gara di scacchi. Convengono di fare due partite, assegnando punti nel solito modo, cioè un punto per ogni partita vinta, zero punti per partite perse, mezzo punto in caso di pareggio o patta. Se dopo le due partite i due giocatori hanno uguale punteggio, lanceranno una moneta equilibrata per determinare il vincitore della gara. Antonio sa giocare con due diversi approcci, uno offensivo e uno difensivo, mentre Berta gioca sempre in maniera offensiva. Se Antonio gioca in maniera offensiva, vince con probabilità $p \in (0, 1]$ e perde con probabilità $1 - p$. Se invece gioca in maniera difensiva, pareggia con probabilità $q \in (0, 1]$ e perde con probabilità $1 - q$.

Antonio decide di adottare la seguente strategia. Gioca la prima partita in maniera offensiva. Se perde, gioca anche la seconda in maniera offensiva, se vince gioca la seconda partita in maniera difensiva.

(a) Calcolare, in termini di p e q, la probabilità p_* che Antonio vinca la gara.

(b) Si assuma $q = 0.9$. Per quali valori di p si ha $p_* > \frac{1}{2}$? E' possibile che Berta sia la giocatrice più forte (nel senso di avere maggiore probabilità di vincere una partita rispetto ad Antonio) e ciononostante Antonio abbia maggiore probabilità di vincere la gara?

SOLUZIONE.

(a) Antonio vince la gara se si verifica una delle seguenti alternative:

- vince la prima partita e pareggia la seconda;
- vince la prima partita, perde la seconda, e vince nel lancio della moneta;
- perde la prima partita, vince la seconda, e vince nel lancio della moneta.

Pertanto

$$p_* = pq + \frac{1}{2}p(1 - q) + \frac{1}{2}p(1 - p).$$

(b) Posto $q = 0.9$, si ha $pq + \frac{1}{2}p(1 - q) + \frac{1}{2}p(1 - p) > \frac{1}{2}$ se e solo se $p > 0.4$. Quindi se $p \in (0.4, 0.5)$, Berta è più forte ma Antonio ha maggiore probabilità di vincere la gara.

ESERCIZIO 3. Sia $\phi : [0, +\infty) \to [0, 1)$ una funzione continua, crescente, tale che $\phi(0) = 0$, $\lim_{t \to +\infty} \phi(t) = 1$, e il cui comportamento asintotico per $x \simeq 0$ è dato da

$$\phi(x) = \alpha x^k + o(x^k),$$

dove $\alpha, k > 0$. Si consideri una successione $(X_n)_{n \geq 1}$ di variabili casuali i.i.d., a valori in $[0, +\infty)$, e tali che, per ogni $t > 0$

$$P(X_i > t) = \phi\left(\frac{1}{t}\right).$$

Si ponga, infine,

$$Y_n := \frac{\max(X_1, X_2, \dots, X_n)}{n^{1/k}}.$$

Mostrare che, per ogni $y > 0$, si ha

$$\lim_{n \to +\infty} P(Y_n \leq y) = e^{-\frac{\alpha}{y^k}}.$$

SOLUZIONE. Abbiamo

$$\begin{aligned} P(Y_n \leq y) = P(\max(X_1, X_2, \dots, X_n) \leq n^{1/k} y) &= \left[1 - \phi\left(\frac{1}{n^{1/k} y}\right)\right]^n \\ &= \left[1 - \frac{1}{n y^k} + o(1/n)\right]^n \to e^{-\frac{\alpha}{y^k}} \end{aligned}$$

per $n \to +\infty$.

ESERCIZIO 4. Una fabbrica produce RAM che possono avere due tipi di difetti: il difetto A e il difetto B. Il responsabile per la qualità della fabbrica afferma, dall'esperienza passata, che la probabilità che una RAM abbia almeno uno dei due difetti è pari a 0,3; la probabilità che abbia il difetto A ma non il B è pari a 0,1; la probabilità che abbia contemporaneamente i due difetti è pari a 0,2. Calcolare la probabilità che una RAM abbia:

a) il difetto A;

b) il difetto B;

c) il difetto A, dato che si è riscontrato che non abbia il difetto B.

SOLUZIONE. Consideriamo gli eventi: $A =$ "è presente il difetto A, $B =$ "è presente il difetto B. Sappiamo che: $P(A \cup B) = 0.3$, $P(A \setminus B) = 0.1$, $P(A \cap B) = 0.2$.

a)
$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \setminus B) = 0.3.$$

b)
$$P(B) = P(A \cup B) - P(A) + P(A \cap B) = 0.2.$$

c)
$$P(A|B^c) = \frac{P(A \cap B^c)}{P(B^c)} = \frac{P(A \setminus B)}{1 - P(B)} = \frac{0.1}{0.8} = \frac{1}{8}.$$