Prova scritta di Probabilità e Statistica	Cognome: ______________________
Laurea in Matematica	Nome: ______________________
19 luglio 2011	Matricola: ______________________

ESERCIZIO 1. Siano X e Y variabili aleatorie discrete, definite nello stesso spazio di probabilità. La funzione

$$\varphi_{X,Y}(x,z) := \begin{cases} P(X = x | X + Y = z) & \text{se } P(X + Y = z) \neq 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

viene detta *distribuzione di X condizionata a $X + Y$*.

(a) Determinare $\varphi(x,y)$ nel caso in cui $X \sim B(n,p)$ e $Y \sim B(m,p)$ sono indipendenti. In particolare, mostrare che $\varphi(x,y)$ non dipende da p

(b) Determinare $\varphi(x,y)$ nel caso in cui $X \sim Po(\lambda)$ e $Y \sim Po(\mu)$ sono indipendenti. In particolare, mostrare che $\varphi(x,y)$ dipende da λ e μ solo attraverso la quantità $\frac{\lambda}{\lambda+\mu}$.

(c) Siano X e Y due variabili aleatorie discrete indipendenti, con densità rispettivamente p_X e p_Y, e sia $f : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ tale che

$$\sum_{x,y} f(x+y) p_X(x) p_Y(y) =: c \in (0, +\infty).$$

Siano inoltre X', Y' due variabili aleatorie discrete la cui densità congiunta sia data da

$$p_{X',Y'}(x,y) := \frac{1}{c} f(x+y) p_X(x) p_Y(y).$$

Mostrare che $\varphi_{X',Y'} = \varphi_{X,Y}$.

SOLUZIONE.

(a) Si noti che $X + Y \sim B(n+m, p)$. Pertanto, se $x = 0, 1, \ldots, n$, $z = 0, 1, \ldots, n+m$, e $x \leq z$,

$$\varphi_{X,Y}(x,z) = \frac{P(X = x)P(Y = z - x)}{P(X + Y = z)} = \frac{\binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \binom{m}{z-x} p^{z-x} (1-p)^{m-z+x}}{\binom{n+m}{z} p^z (1-p)^{n+m-z}} = \frac{\binom{n}{x}\binom{m}{z-x}}{\binom{n+m}{z}}$$

(b) Analogamente, essendo $X + Y \sim Po(\lambda + \mu)$, se $0 \leq x \leq z$,

$$\varphi_{X,Y}(x,z) = \frac{P(X = x)P(Y = z - x)}{P(X + Y = z)} = \frac{e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} \epsilon^{-\mu} \frac{\mu^{z-x}}{(z-x)!}}{e^{-\lambda-\mu} \frac{(\lambda+\mu)^z}{z!}} = \binom{z}{x} \left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^x \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^{z-x}$$

(c) Anzitutto, notiamo che

$$P(X'+Y' = z) = \sum_x P(X' = x, Y' = z-x) = f(z) \sum_x P(X = x, Y = z-x) = f(z) P(X+Y = z).$$

Quindi $P(X' + Y' = z) > 0$ se e solo se $P(X + Y = z) > 0$. In tal caso

$$\varphi_{X',Y'}(x,z) = \frac{P(X' = x, Y' = z - x)}{P(X' + Y' = z)} = \frac{f(z) p_X(x) p_Y(z - x)}{f(z) P(X + Y = z)} = \varphi_{X,Y}(x,z).$$

ESERCIZIO 2. Da un mazzo di 50 carte numerate da 1 a 50, si estraggono a caso 3 carte. Siano

$$\begin{aligned} X &= \text{numero più basso estratto} \\ Z &= \text{numero più alto estratto} \\ Y &= \text{terzo numero estratto} \end{aligned}$$

(a) Determinare le distribuzioni marginali di X, Y e Z.

(b) Determinare la distribuzione di (X, Y), e mostrare che $Y - X$ ha la stessa distribuzione di X.

SOLUZIONE.

(a) Notare che $X \in \{1, 2, \ldots, 48\}$. Se $n \in \{1, 2, \ldots, 48\}$, l'evento $\{X = n\}$ significa "oltre a n, gli altri due numeri estratti sono maggiori di n". Quindi

$$P(X = n) = \frac{\binom{50-n}{2}}{\binom{50}{3}}.$$

Con argomenti analoghi: per $n \in \{3, 4, \ldots, 50\}$

$$P(Z = n) = \frac{\binom{n-1}{2}}{\binom{50}{3}}$$

e per $n \in \{2, 3, \ldots, 49\}$

$$P(Y = n) = \frac{(n-1)(50-n)}{\binom{50}{3}}.$$

(b) Se $n \in \{1, 2, \ldots, 48\}$, $m \in \{2, 3, \ldots, 49\} = n < m$

$$P(X = n, Y = m) = \frac{50 - m}{\binom{50}{3}}.$$

Notare che $Y - X \in \{1, \ldots, 48\}$. Se $k \in \{1, \ldots, 48\}$

$$\begin{aligned} P(Y - X = k) = \sum_n P(X = n, Y = n + k) &= \sum_{n=1}^{49-k} \frac{50 - n - k}{\binom{50}{3}} \\ &= \frac{1}{\binom{50}{3}} \left[(50-k)(49-k) - \sum_{n=1}^{49-k} n \right] = \frac{\binom{50-k}{2}}{\binom{50}{3}} \end{aligned}$$

ESERCIZIO 3. Durante la notte, un taxi ha causato un incidente. In città operano due compagnie di taxi, una con i taxi gialli, l'altra con i taxi bianchi. Un testimone ha dichiarato che il taxi coinvolto nell'incidente era giallo. Sappiamo che

- I taxi bianchi sono l'85% dei taxi in città.
- La probabilità che un testimone, di notte, identifichi correttamente il colore de taxi e' 0.8.

(a) Sulla base di queste informazioni, qual è la probabilità che il taxi coinvolto nell'incidente fosse in realtà bianco?

(b) Supponiamo che un secondo testimone abbia dichiarato che il taxi era giallo, e che la correttezza dell'identificazione corretta del colore da parte di questo testimone sia indipendente da quella dell'altro. Data questa ulteriore informazione, qual è ora la probabilità che il taxi coinvolto nell'incidente fosse in realtà bianco?

SOLUZIONE.

(a) Consideriamo gli eventi: $A =$ "il taxi coinvolto è bianco", $B =$ "il testimone dichiara di aver visto un taxi giallo". Sappiamo che $P(A) = 0.85$, $P(B|A) = 0.2$, $P(B|A^c) = 0.8$. Perciò

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B|A)P(A) + P(B|A^c)P(A^c)} = \frac{17}{29}.$$

(b) Sia $C =$ "il secondo testimone dichiara di aver visto un taxi giallo". Per ipotesi $P(B \cap C|A) = (0.2)^2 = 0.04$, e $P(B \cap C|A^c) = (0.8)^2 = 0.64$. Allora

$$P(A|B \cap C) = \frac{P(B \cap C|A)P(A)}{P(B \cap C|A)P(A) + P(B \cap C|A^c)P(A^c)} = \frac{17}{65}.$$

ESERCIZIO 4. Sia X una variabile casuale assolutamente continua con densità $f_X(x) = 2x\mathbf{1}_{(0,1)}(x)$.

(a) Determinare la distribuzione di $Y := -\log X$.

(b) Calcolare la probabilità che l'equazione

$$x^2 + 2Yx + 5Y^2 - 1 = 0$$

non ammetta soluzioni reali.

(c) Si definisca: $Z := \max(1, Y)$. Si calcoli la funzione di ripartizione di Z. La variabile casuale Z è assolutamente continua? È discreta?

SOLUZIONE.

(a) Per $y \in (0, +\infty)$

$$F_Y(y) = P(X \geq e^{-y}) = \int_{e^{-y}}^{1} 2x dx = 1 - e^{-2y},$$

da cui segue che $Y \sim Exp(2)$.

(b) Tale equazione non ammette soluzioni reali se e solo se

$$Y^2 - 5Y^2 + 1 = 1 - 4Y^2 < 0$$

cioè se $Y > 1/2$. Ciò avviene con probabilità

$$P(Y > 1/2) = 1 - F_Y(1/2) = e^{-1}.$$

(c) Calcoliamo la funzione di ripartizione di Z. Se $z \geq 1$

$$F_Z(z) = P(Y \leq z) = 1 - e^{-2z},$$

mentre $F_Z(z) = 0$ per $z < 1$. Il fatto che F_Z sia discontinua in $z = 1$ mostra che Z non può essere assolutamente continua. D'altra parte, essendo $z = 1$ l'unico punto di discontinuità, abbiamo $P(Z = 1) = e^{-2} < 1$ e $P(Z = z) = 0$ pe ogni $z \neq 1$. Questo mostra che Z non può avere una densità discreta, e dunque non è una variabile discreta.