I Prova Parziale di Probabilità e Statistica	Cognome: ____________
Laurea in Matematica	Nome: ____________
16 maggio 2011	Matricola: ____________

TEMA A

ESERCIZIO 1. Un gioco a premi ha il seguente funzionamento. Il montepremi iniziale è $C > 0$. Il concorrente lancia due volte una moneta. Se l'esito del primo e del secondo lancio sono uguali, il concorrente vince l'intero montepremi. In caso contrario il montepremi si dimezza. Il concorrente lancia la moneta una terza volta. Se l'esito del terzo lancio è uguale a quello del secondo, allora il concorrente vince $C/2$. In caso contrario il montepremi si dimezza ulteriormente, e così via. Sia X il montepremi vinto dal concorrente al termine del gioco. Si accetti il fatto che il gioco ha termine, cioè che non sia possibile avere una successione infinita di esiti in cui ogni esito è diverso dal precedente.

(a) Si assuma che la moneta sia equilibrata. Determinare la densità discreta di X.

(b) Sempre nell'ipotesi che la moneta sia equilibrata, si determini il valor medio di X (ricordare la serie geometrica $\sum_{n \geq 0} a^n = \frac{1}{1-a}$, per $|a| < 1$).

(c) * Supponiamo ora che la moneta non sia equilibrata: la probabilità che esca *testa* è $p \in (0,1)$. Determinare la densità e il valor medio di X.

SOLUZIONE.

(a) Si tratta di usare lo schema delle prove ripetute indipendenti. Si noti che l'evento $\left\{X = \frac{C}{2^{k-1}}\right\}$ è costituito dalle sequenze di esiti di lanci di una moneta in cui nei primi k esiti le teste e le croci si alternano, mentre l'esito $k+1$-mo è uguale al k-mo. Limitandosi ai primi $k+1$ lanci, ci sono due sequenze con questa proprietà, a seconda che l'esito del primo lancio sia testa o croce. Ognuna di queste sequenze ha probabilità $\frac{1}{2^{k+1}}$. Quindi

$$P\left(X = \frac{C}{2^{k-1}}\right) = \frac{2}{2^{k+1}} = \frac{1}{2^k}.$$

(b) Ne segue che

$$E(X) = \sum_{k \geq 1} \frac{C}{2^{k-1}} \frac{1}{2^k} = \frac{C}{2} \sum_{k \geq 1} \frac{1}{4^{k-1}} = \frac{C}{2} \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{2C}{3}.$$

(c) È ancora vero che l'evento $\left\{X = \frac{C}{2^{k-1}}\right\}$, limitandosi ai primi $k+1$ lanci, è costituito da due sequenze, quella che inizia con una testa e quella che inizia con una croce. Non necessariamente queste due sequenze hanno la stessa probabilità. Conviene distinguere due casi:
-k = *2n*, cioè k pari. La sequenza di $k+1 = 2n+1$ lanci che inizia per testa contiene n teste e $n+1$ croci, e ha dunque probabilità $p^n(1-p)^{n+1}$. Analogamente, la sequenza che comincia per croce ha probabilità $p^{n+1}(1-p)^n$. Pertanto

$$P\left(X = \frac{C}{2^{2n-1}}\right) = p^{n+1}(1-p)^n + p^n(1-p)^{n+1} = p^n(1-p)^n.$$

-k = *2n-1*, cioè k dispari. In questo caso le due sequenze dei primi $k+1 = 2n$ lanci contengono, rispettivamente, $n+1$ teste e $n-1$ croci e viceversa, da cui segue che

$$P\left(X = \frac{C}{2^{2n-2}}\right) = p^{n+1}(1-p)^{n-1} + p^{n-1}(1-p)^{n+1} = p^{n-1}(1-p)^{n+1}\left[p^2 + (1-p)^2\right].$$

Infine

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{n\geq 1} \frac{C}{2^{2n-1}} p^n (1-p)^n + \left[p^2 + (1-p)^2\right] \sum_{n\geq 1} \frac{C}{2^{2n-2}} p^{n-1}(1-p)^{n-1} \\ &= C\left[\frac{1}{2}p(1-p) + p^2 + (1-p)^2\right] \sum_{n\geq 1}\left(\frac{p(1-p)}{4}\right)^{n-1} = C\,\frac{\frac{1}{2}p(1-p) + p^2 + (1-p)^2}{1 - \frac{p(1-p)}{4}} \end{aligned}$$

ESERCIZIO 2. Una parete artificiale per l'arrampicata sportiva è composta da n settori di difficoltà crescente. Un *climber* ha probabilità p di superare il primo settore. Inoltre, se supera il $k-1$-mo settore, con $2 \leq k \leq n$, ha probabilità p^k di superare il settore successivo. (Ovviamente, se non ha superato il $k-1$-mo settore, non ha superato nemmeno il k-mo)

(a) Si mostri, per induzione su $k = 1, 2, \ldots, n$, che la probabilità che il *climber* superi il k-mo settore è $p^{\frac{k(k+1)}{2}}$.

(b) Qual è la probabilità che il *climber* sia caduto nel settore k-mo? (Cioè che abbia superato il settore $k-1$-mo ma non il k-mo)

(c) Sapendo che il *climber* non ha superato l'intera parete, qual è la probabilità che sia caduto nel settore k-mo?

SOLUZIONE.

(a) Si consideri l'evento A_k = "il climber ha superato il k-mo settore. Sappiamo che $P(A_1) = p$, e $P(A_k|A_{k-1}) = p^k$. Ne segue che

$$P(A_k) = P(A_k \cap A_{k-1}) = P(A_k|A_{k-1})P(A_{k-1}),$$

da cui, per ipotesi induttiva,

$$P(A_k) = p^k p^{\frac{k(k-1)}{2}} = p^{\frac{k(k+1)}{2}}.$$

(b) L'evento in questione è $B_k := A_k^c \cap A_{k-1}$. Perciò

$$P(B_k) = P(A_k^c|A_{k-1})P(A_{k-1}) = (1-p^k)p^{\frac{k(k-1)}{2}}.$$

(c) Si tratta di calcolare $P(B_k|A_n^c)$. Essendo $B_k \subseteq A_n^c$, abbiamo

$$P(B_k|A_n^c) = \frac{P(B_k)}{P(A_n^c)} = \frac{(1-p^k)p^{\frac{k(k-1)}{2}}}{1-p^{\frac{n(n+1)}{2}}}.$$

ESERCIZIO 3. Una classe è costituita da 30 persone, tra cui Giacomo, Claudio e Nicola. Un insegnante divide in modo casuale la classe in tre gruppi di 10 persone.

(a) Qual è la probabilità che Giacomo, Claudio e Nicola finiscano in tre gruppi distinti? (Non semplificare i coefficienti binomiali)

(b) Qual è la probabilità che finiscano nello stesso gruppo?

SOLUZIONE.

(a) Sia

$$\Omega := \{(A_1, A_2, A_3) : A_i \subseteq \{1, 2, \ldots, 30\},\ |A_i| = 10,\ A_i \cap A_j = \emptyset \text{ per } i \neq j\},$$

e P la probabilità uniforme su Ω. Si noti che Ω è formato da *terne ordinate* di sottoinsiemi che formano una partizione. Non sarebbe affatto sbagliato considerare terne non ordinate. Non è restrittivo assumere che Giacomo, Claudio e Nicola corrispondano rispettivamente agli elementi $1, 2$ e 3 di $\{1, 2, \ldots, 30\}$. Un elemento di Ω si determina con la seguente sequenza di scelte successive:

- Scelgo A_1: $\binom{30}{10}$ scelte.
- Scelgo A_2 da $\{1, 2, \ldots, 30\} \setminus A_1$: $\binom{20}{10}$ scelte.

Ovviamente A_3 resta determinato. Quindi

$$|\Omega| = \binom{30}{10}\binom{20}{10}.$$

Sia B = "Giacomo, Claudio e Nicola finiscono in tre gruppi distinti". Un elemento di B si determina con la seguente sequenza di scelte successive:

- Scelgo 9 elementi per A_1 in $\{4, 5, \ldots, 30\}$: $\binom{27}{9}$ scelte.
- Scelgo 9 elementi per A_2 in $\{4, 5, \ldots, 30\} \setminus A_1$: $\binom{18}{9}$ scelte.
- Scelgo come disporre $1, 2$ e 3 nei tre posti vuoti: $3! = 6$ scelte.

Dunque:

$$|B| = 6\binom{27}{9}\binom{18}{9} \quad \Rightarrow \quad P(B) = \frac{6\binom{27}{9}\binom{18}{9}}{\binom{30}{10}\binom{20}{10}}.$$

(b) Sia C = "Giacomo, Claudio e Nicola finiscono nello stesso gruppo". Un elemento di C si determina con la seguente sequenza di scelte successive:

- Scelgo il gruppo in cui inserire $1, 2$ e 3: 3 scelte.
- Scelgo i rimanenti componenti di quel gruppo: $\binom{27}{7}$.
- Scelgo i componenti di uno (qualsiasi) degli altri due gruppi: $\binom{20}{10}$ scelte.

Dunque

$$P(C) = \frac{3\binom{27}{7}\binom{20}{10}}{\binom{30}{10}\binom{20}{10}} = \frac{3\binom{27}{7}}{\binom{30}{10}}.$$