

I Prova Parziale di Probabilità e Statistica	Cognome: _____
Laurea in Matematica	Nome: _____
16 maggio 2011	Matricola: _____

TEMA B

ESERCIZIO 1. Un gruppo di n persone, tra cui Elena e Marta, si dispongono casualmente in una fila.

- Qual è la probabilità che Elena e Marta si trovino in posti consecutivi, cioè che una delle due preceda immediatamente l'altra nella fila?
- Qual è la probabilità che nella fila vi siano esattamente k persone tra Elena e Marta (indipendentemente da quale delle due venga prima)?
- Sia X il numero di persone della fila comprese tra Elena e Marta. Determinare il valor medio di X (ricordare le formule $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$ e $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, valide per ogni $n \geq 1$).

SOLUZIONE. Sia S_n il gruppo delle permutazioni di $\{1, 2, \dots, n\}$, e P la probabilità uniforme su S_n . Non è restrittivo assumere che Elena e Marta corrispondano rispettivamente agli elementi 1 e 2 di $\{1, 2, \dots, n\}$.

- Sia $A := A_1 \cup A_2$, dove

$$A_1 := \{\sigma \in S_n : \sigma(1) = \sigma(2) + 1\} \quad A_2 := \{\sigma \in S_n : \sigma(2) = \sigma(1) + 1\}.$$

Ovviamente A_1 e A_2 sono disgiunti, e hanno la stessa cardinalità. Un elemento di A_1 è determinato dalle seguenti scelte successive:

- Scelgo il valore di $\sigma(1) \in \{1, 2, \dots, n-1\}$: $n-1$ scelte.
- Scelgo i valori di $\sigma(k)$ per $k \geq 3$: $(n-2)!$ scelte.

Ne segue che

$$P(A) = \frac{2(n-1)!}{n!} = \frac{2}{n}.$$

- Sia $0 \leq k \leq n-1$. L'evento da considerare è $A^{(k)} := A^{(k)}_1 \cup A^{(k)}_2$, dove

$$A^{(k)}_1 := \{\sigma \in S_n : \sigma(1) = \sigma(2) + k + 1\} \quad A^{(k)}_2 := \{\sigma \in S_n : \sigma(2) = \sigma(1) + k + 1\}.$$

Procedendo in modo analogo al punto precedente, un elemento di A_1 è determinato dalle seguenti scelte successive:

- Scelgo il valore di $\sigma(1) \in \{1, 2, \dots, n-k-1\}$: $n-k-1$ scelte.
- Scelgo i valori di $\sigma(k)$ per $k \geq 3$: $(n-2)!$ scelte.

Quindi

$$P(A_k) = \frac{2(n-k-1)(n-2)!}{n!} = \frac{2(n-k-1)}{n(n-1)}.$$

- Notare che $P(X = k) = P(A_k)$. Dunque

$$E(X) = \sum_{k=0}^{n-2} k \frac{2(n-k-1)}{n(n-1)} = \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n-2} k - \frac{2}{n(n-1)} \sum_{k=1}^{n-2} k^2 = \dots = \frac{n-2}{3}.$$

ESERCIZIO 2. Una parete artificiale per l'arrampicata sportiva è composta da n settori di difficoltà crescente. Un *climber* ha probabilità p di superare il primo settore. Inoltre, se supera il $k - 1$ -mo settore, con $2 \leq k \leq n$, ha probabilità p/k di superare il settore successivo. (Ovviamente, se non ha superato il $k - 1$ -mo settore, non ha superato nemmeno il k -mo)

- (a) Si mostri, per induzione su $k = 1, 2, \dots, n$, che la probabilità che il *climber* superi il k -mo settore è $\frac{p^k}{k!}$.
- (b) Qual è la probabilità che il *climber* sia caduto nel settore k -mo? (Cioè che abbia superato il settore $k - 1$ -mo ma non il k -mo)
- (c) Sapendo che il *climber* non ha superato l'intera parete, qual è la probabilità che sia caduto nel settore k -mo?

SOLUZIONE.

- (a) Si consideri l'evento $A_k =$ "il climber ha superato il k -mo settore. Sappiamo che $P(A_1) = p$, e $P(A_k|A_{k-1}) = \frac{p}{k}$. Ne segue che

$$P(A_k) = P(A_k \cap A_{k-1}) = P(A_k|A_{k-1})P(A_{k-1}),$$

da cui, per ipotesi induttiva,

$$P(A_k) = \frac{p}{k} \frac{p^{k-1}}{(k-1)!} = \frac{p^k}{k!}.$$

- (b) L'evento in questione è $B_k := A_k^c \cap A_{k-1}$. Perciò

$$P(B_k) = P(A_k^c|A_{k-1})P(A_{k-1}) = \left(1 - \frac{p}{k}\right) \frac{p^{k-1}}{(k-1)!}.$$

- (c) Si tratta di calcolare $P(B_k|A_n^c)$. Essendo $B_k \subseteq A_n^c$, abbiamo

$$P(B_k|A_n^c) = \frac{P(B_k)}{P(A_n^c)} = \frac{\left(1 - \frac{p}{k}\right) \frac{p^{k-1}}{(k-1)!}}{1 - \frac{p^n}{n!}}.$$

ESERCIZIO 3. Una classe è costituita da 30 persone, tra cui Giacomo, Claudio e Nicola. Un insegnante divide in modo casuale la classe in tre gruppi di 10 persone.

- (a) Qual è la probabilità che Giacomo, Claudio e Nicola finiscano in tre gruppi distinti? (lasciare indicati i coefficienti binomiali)
- (b) * Supponiamo ora si risolve il medesimo problema, ma in una classe composta da $3n$ individui, da dividere in tre gruppi di n individui. Sia p_n la probabilità che Giacomo, Claudio e Nicola finiscano in tre gruppi distinti. Determinare p_n e mostrare che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = \frac{2}{9}.$$

(Sugg.: usare la formula di Stirling: $n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$)

SOLUZIONE.

- (a) Sia

$$\Omega := \{(A_1, A_2, A_3) : A_i \subseteq \{1, 2, \dots, 30\}, |A_i| = 10, A_i \cap A_j = \emptyset \text{ per } i \neq j\},$$

e P la probabilità uniforme su Ω . Si noti che Ω è formato da *terne ordinate* di sottoinsiemi che formano una partizione. Non sarebbe affatto sbagliato considerare terne non ordinate. Non è restrittivo assumere che Giacomo, Claudio e Nicola corrispondano rispettivamente agli elementi 1, 2 e 3 di $\{1, 2, \dots, 30\}$. Un elemento di Ω si determina con la seguente sequenza di scelte successive:

- Scelgo A_1 : $\binom{30}{10}$ scelte.
- Scelgo A_2 da $\{1, 2, \dots, 30\} \setminus A_1$: $\binom{20}{10}$ scelte.

Ovviamente A_3 resta determinato. Quindi

$$|\Omega| = \binom{30}{10} \binom{20}{10}.$$

Sia $B = \text{"Giacomo, Claudio e Nicola finiscono in tre gruppi distinti"}$. Un elemento di B si determina con la seguente sequenza di scelte successive:

- Scelgo 9 elementi per A_1 in $\{4, 5, \dots, 30\}$: $\binom{27}{9}$ scelte.
- Scelgo 9 elementi per A_2 in $\{4, 5, \dots, 30\} \setminus A_1$: $\binom{18}{9}$ scelte.
- Scelgo come disporre 1, 2 e 3 nei tre posti vuoti: $3! = 6$ scelte.

Dunque:

$$|B| = 6 \binom{27}{9} \binom{18}{9} \Rightarrow P(B) = \frac{6 \binom{27}{9} \binom{18}{9}}{\binom{30}{10} \binom{20}{10}}.$$

- (b) L'argomento al punto precedente si ripete tale e quale per $3n$ elementi, e si ottiene

$$p_n = \frac{6 \binom{3(n-1)}{n-1} \binom{2(n-1)}{n-1}}{\binom{3n}{n} \binom{2n}{n}}.$$

Sia $a_n := \binom{3n}{n} \binom{2n}{n}$, per cui $p_n = 6 \frac{a_{n-1}}{a_n}$. Per la formula di Stirling

$$a_n = \frac{(3n)!}{n!(2n)!} \frac{(2n)!}{n!n!} = \frac{(3n)!}{(n!)^3} \sim \frac{(3n)^{(3n)} e^{-3n} \sqrt{6\pi n}}{n^{3n} e^{-3n} (2\pi n)^{3/2}} = \sqrt{\frac{3}{4}} \frac{1}{n} 3^{3n}.$$

Perciò

$$p_n = 6 \frac{a_{n-1}}{a_n} \sim \frac{6}{3^3} = \frac{2}{9}$$

In realtà è possibile giungere alla conclusione anche senza usare la formula di Stirling:

$$p_n = \frac{6 \binom{3(n-1)}{n-1} \binom{2(n-1)}{n-1}}{\binom{3n}{n} \binom{2n}{n}} = 6 \frac{(3n-3)! (n!)^3}{[(n-1)!]^3 (3n)!} = \frac{6n^3}{3n(3n-1)(3n-2)} \sim \frac{2}{9}.$$