

II Prova Parziale di Probabilità e Statistica	Cognome: _____
Laurea in Matematica	Nome: _____
27 giugno 2011	Matricola: _____

ESERCIZIO 1. Sia X una variabile aleatoria a valori in $\mathbb{N}$, la cui funzione di ripartizione F_X è data, per $n \in \mathbb{N}$, dalla formula

$$F_X(n) := 1 - \frac{1}{n+1}.$$

(a) Si determini la densità p_X di X , e si mostri che $X \notin L^1$.

Per $\alpha > 0$, diciamo che una variabile Y ha distribuzione $S(\alpha)$ ($Y \sim S(\alpha)$) se per ogni $x \in \mathbb{R}$

$$F_Y(x) := 1 - (1 - F_X(x))^\alpha.$$

(b) Siano $Y \sim S(\alpha)$ e $Z \sim S(\beta)$ variabili aleatorie indipendenti. Si determini la distribuzione di $W := \min(Y, Z)$.

(c) Determinare i valori di α tali che se $Y \sim S(\alpha)$ allora $Y \in L^1$. (Può essere utile ricordare che $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + o(x)$ per $x \rightarrow 0$)

SOLUZIONE.

(a)

$$p_X(n) = F_X(n) - F_X(n-1) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}.$$

Inoltre

$$E(X) = \sum_n np_X(n) = \sum_n \frac{1}{n+1} = +\infty.$$

Quindi $X \notin L^1$

(b) Notare che se $Y \sim S(\alpha)$

$$1 - F_Y(n) = (1 - F_X(n))^\alpha = \frac{1}{(n+1)^\alpha}.$$

Pertanto

$$\begin{aligned} 1 - F_W(n) &= P(W > n) = P(Y > n)P(Z > n) = (1 - F_Y(n))(1 - F_Z(n)) \\ &= (1 - F_X(n))^\alpha (1 - F_X(n))^\beta = (1 - F_X(n))^{\alpha+\beta}, \end{aligned}$$

da cui segue che $W \sim S(\alpha + \beta)$.

(c) Anzitutto

$$\begin{aligned} p_Y(n) &= F_Y(n) - F_Y(n-1) = \frac{1}{n^\alpha} - \frac{1}{(n+1)^\alpha} = \frac{1}{n^\alpha} \left[1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^\alpha} \right] \\ &= \frac{1}{n^\alpha} \left[1 - \frac{1}{1 + \frac{\alpha}{n} + o(1/n)} \right] = \frac{1}{n^\alpha} \frac{\frac{\alpha}{n} + o(1/n)}{1 + \frac{\alpha}{n} + o(1/n)} \end{aligned}$$

da cui segue che $p_Y(n) \sim \frac{\alpha}{n^{\alpha+1}}$, nel senso che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{p_Y(n)}{\frac{\alpha}{n^{\alpha+1}}} = 1.$$

Perciò

$$E(Y) = \sum_n np_Y(n) < +\infty$$

se e solo se

$$\sum_n \frac{1}{n^\alpha} < +\infty$$

cioè per $\alpha > 1$.

Un modo alternativo, e assai più rapido, di ottenere il risultato, consiste nel ricordare che, per variabili aleatorie a valori in $\mathbb{N}$, si ha

$$E(Y) = \sum_{n \geq 0} P(Y > n) = \sum_{n \geq 0} [1 - F_Y(n)].$$

In questo caso

$$E(Y) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{(n+1)^\alpha}$$

che è finito se e solo se $\alpha > 1$.

ESERCIZIO 2. Una scala lunga 10 metri viene appoggiata in modo aleatorio alla parete di un palazzo, in modo tale che se X è la distanza tra la base della scala e la base della parete, X è una variabile aleatoria assolutamente continua con densità

$$f_X(x) := \frac{\alpha + 1}{10^{\alpha+1}} (10 - x)^\alpha \mathbf{1}_{[0,10]}(x),$$

dove $\alpha > 0$ è un parametro fissato.

- (a) Calcolare la media $E(X)$ e la funzione di ripartizione F_X .
- (b) Sia Y l'altezza rispetto al terreno del vertice della scala. Determinare la funzione di ripartizione F_Y e la densità f_Y .
- (c) Per eseguire dei lavori di manutenzione sulla parete, è necessario che il vertice della scala abbia una distanza dal terreno compresa tra 6 e 8 metri. Qual è la probabilità che ciò accada?

SOLUZIONE.

(a)

$$\begin{aligned} E(X) &= \frac{\alpha + 1}{10^{\alpha+1}} \int_0^{10} x(10 - x)^\alpha dx \\ &= \frac{\alpha + 1}{10^{\alpha+1}} \left[-\frac{x(10 - x)^{\alpha+1}}{\alpha + 1} \Big|_0^{10} + \frac{1}{\alpha + 1} \int_0^{10} (10 - x)^{\alpha+1} dx \right] = \frac{10}{\alpha + 2}. \end{aligned}$$

Chiaramente $F_X(x) = 0$ per $x < 0$ e $F_X(x) = 1$ per $x > 10$. Per $0 \leq x \leq 10$:

$$F_X(x) = \frac{\alpha + 1}{10^{\alpha+1}} \int_0^{10} (10 - t)^\alpha dt = -\frac{(10 - t)^{\alpha+1}}{10^{\alpha+1}} \Big|_0^x = 1 - \left(1 - \frac{x}{10}\right)^{\alpha+1}.$$

(b) Si noti che $Y^2 = 100 - X^2$. Perciò, per $y \in [0, 10]$:

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \leq y) = P(Y^2 \leq y^2) = P(X^2 \geq 100 - y^2) = 1 - F_X\left(\sqrt{100 - y^2}\right) \\ &= \left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{y}{10}\right)^2}\right)^{\alpha+1}. \end{aligned}$$

Infine

$$f_Y(y) = F'_Y(y) = \frac{\alpha + 1}{10} \left(1 - \left(\frac{y}{10}\right)^2\right)^\alpha \frac{y}{\sqrt{100 - y^2}} \mathbf{1}_{(0,10)}(y).$$

(c)

$$P(6 \leq Y \leq 8) = F_Y(8) - F_Y(6) = \frac{2^{\alpha+1} - 1}{5^{\alpha+1}}.$$

ESERCIZIO 3. Un grande studio fotografico riceve l'incarico di eseguire un servizio che prevede l'uso di speciali lampade ad alta luminosità. La durata di tali lampade ha distribuzione esponenziale di media uguale a 100 ore, e costano 100 Euro l'una. Le durate di lampade distinte si possono considerare indipendenti. Per il servizio si prevede siano necessarie 10000 ore di luce prodotta da tali lampade. Inoltre, a causa degli elevati costi di trasporto, è conveniente acquistare le lampade necessarie in un unico ordine.

- (a) Usando l'approssimazione normale, si determini il minimo numero di lampade che è necessario acquistare affinché le 10000 ore di luce siano garantite con probabilità 0.95.
- (b) Un'altra ditta di lampade propone un prodotto la cui durata ha distribuzione esponenziale di media 200 ore, al costo di 190 Euro per lampada. Ritenete sia conveniente acquistare da questa ditta anziché da quella del punto precedente? (Anche in questo caso le lampade vengono acquistate nel numero minimo necessario a garantire 10000 ore di luce con probabilità 0.95).

SOLUZIONE.

- (a) Sia $X_i \sim \text{Exp}(1/100)$ la durata dell' i -esima lampada. Se n è il numero di lampadine acquistate

$$\begin{aligned} P(X_1 + X_2 + \dots + X_n \geq 10000) &= P\left(\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n - 100n}{100\sqrt{n}} \geq \frac{10000 - 100n}{100\sqrt{n}}\right) \\ &\simeq P\left(N(0, 1) \geq \frac{10000 - 100n}{100\sqrt{n}}\right) = \Phi\left(\frac{100n - 10000}{100\sqrt{n}}\right) = \Phi\left(\frac{n - 100}{\sqrt{n}}\right). \end{aligned}$$

Essendo $\Phi^{-1}(0.95) \simeq 1.645$, dev'essere

$$\begin{aligned} \frac{n - 100}{\sqrt{n}} \geq 1.645 &\iff n - 1.645\sqrt{n} - 100 \geq 0 \\ &\iff \sqrt{n} \geq \frac{1.645 + \sqrt{1.645^2 + 400}}{2} \simeq 10.856 \iff n \geq 118. \end{aligned}$$

- (b) Procedendo analogamente per $Y_i \sim \text{Exp}(1/200)$, si trova

$$\begin{aligned} P(Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n \geq 10000) &= P\left(\frac{Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n - 200n}{200\sqrt{n}} \geq \frac{10000 - 200n}{200\sqrt{n}}\right) \\ &\simeq P\left(N(0, 1) \geq \frac{10000 - 200n}{200\sqrt{n}}\right) = \Phi\left(\frac{200n - 10000}{200\sqrt{n}}\right) = \Phi\left(\frac{n - 50}{\sqrt{n}}\right), \end{aligned}$$

da cui

$$\frac{n - 50}{\sqrt{n}} \geq 1.645 \iff \sqrt{n} \geq \frac{1.645 + \sqrt{1.645^2 + 200}}{2} \simeq 7.94 \iff n \geq 64.$$

La spesa totale, in Euro, per il primo tipo di lampade è perciò $118 \times 100 = 11800$, mentre con il secondo è $190 \times 64 = 12160$. Non è quindi conveniente acquistare questo tipo di lampade (nonostante durino mediamente il doppio costando meno del doppio!)