Prova scritta di Probabilità e Statistica	Cognome: ______________
Laurea Triennale in Matematica	Nome: ______________
30 Gennaio 2012	Matricola: ______________

ESERCIZIO 1. Sia (Ω, P) uno spazio di probabilità discreto.

(a) Mostrare che per ogni scelta di eventi A e B

$$|P(A) - P(B)| \leq P(A\Delta B).$$

(b) Siano $X, Y : \Omega \to E$ due variabili aleatorie. Mostrare che per ogni $C \subseteq E$

$$|P(X \in C) - P(Y \in C)| \leq P(X \neq Y).$$

(c) Nelle stesse ipotesi del punto precedente, mostrare che

$$\sum_{x \in E} |P(X = x) - P(Y = x)| \leq 2P(X \neq Y).$$

(*Sugg.*: porre $C := \{x \in E : P(X = x) \geq P(Y = x)\}$, e usare il risultato del punto precedente per C e C^c).

(d) Per $n \geq 1$ siano $X_n, X : \Omega \to \mathbb{R}$ variabili aleatorie tali che

$$\lim_{n \to +\infty} P(X_n \neq X) = 0,$$

e, per ogni $\omega \in \Omega$ e $n \geq 1$,

$$|X_n(\omega)| \leq M, \quad |X(\omega)| \leq M,$$

dove $M > 0$. Mostrare che

$$\lim_{n \to +\infty} E(X_n) = E(X).$$

SOLUZIONE.

(a) Senza perdita di generalità possiamo supporre che $P(A) \geq P(B)$ (altrimenti scambiamo i ruoli di A e B).

$$|P(A) - P(B)| = P(A) - P(B) \leq P(A) - P(A \cap B) = P(A \setminus B) \leq P(A\Delta B).$$

(b) Posto $A := \{X \in C\}$, $B := \{Y \in C\}$, dal punto precedente abbiamo che

$$|P(X \in C) - P(Y \in C)| \leq P(\{X \in C\}\Delta\{Y \in C\}).$$

Per concludere basta mostrare che

$$\{X \in C\}\Delta\{Y \in C\} \subseteq \{X \neq Y\}.$$

Ma questo è ovvio, poiché se $\omega \in \{X \in C\}\Delta\{Y \in C\}$ allora o $X(\omega) \in C, Y(\omega) \notin C$ o $Y(\omega) \in C, X(\omega) \notin C$; in entrambi i casi $X(\omega) \neq Y(\omega)$.

(c) Posto C come nel suggerimento, abbiamo

$$\sum_{x\in E}|P(X=x)-P(Y=x)| = \sum_{x\in C}[P(X=x)-P(Y=x)] + \sum_{x\in C^c}[P(Y=x)-P(X=x)]$$
$$= [P(X\in C)-P(Y\in C)] + [P(Y\in C^c)-P(X\in C^c)] \leq 2P(X\neq Y).$$

(d) Basta osservare che

$$|E(X_n)-E(X)| = \left|\sum_{x\in E} xP(X_n=x) - \sum_{x\in E} xP(X=x)\right| \leq \sum_{x\in E}|x||P(X_n=x)-P(X=x)|$$
$$\leq M\sum_{x\in E}|P(X_n=x)-P(X=x)| \leq 2MP(X_n\neq X).$$

ESERCIZIO 2. Sia $\Theta \sim U(-\pi/2, \pi/2)$, e sia X tale che l'angolo tra la retta passante per $(0, -1)$ e $(X, 0)$ (orientata da $(0, -1)$ a $(X, 0)$) e l'asse Oy (orientato verso la direzione positiva delle y) sia Θ.

(a) Mostrare che X è una variabile aleatoria assolutamente continua e determinarne la densità.

(b) Determinare il valore di $E(|X|)$.

SOLUZIONE.

(a) Si noti che $X = \tan(\Theta)$. Pertanto

$$F_X(x) = P(\Theta \leq \arctan(x)) = \frac{1}{\pi}[\arctan(x) + \pi].$$

Essendo F_X di classe $\mathcal{C}^1$, X è assolutamente continua e ha densità

$$f_X(x) = F'_X(x) = \frac{1}{\pi(1 + x^2)}.$$

(b)

$$E(|X|) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|x|}{\pi(1 + x^2)} dx = +\infty.$$

ESERCIZIO 3. Ad una votazione per eleggere uno di due candidati A e B partecipano un milione di votanti. Supponiamo di avere le seguenti informazioni:

- Il candidato A può contare su 10000 attivisti, che sicuramente voteranno per lui.
- Il candidato B può contare su 8000 attivisti, che sicuramente voteranno per lui.
- Tutti gli altri elettori voteranno ciascuno dei due candidati con probabilità 1/2, ognuno indipendentemente dagli altri.

Qual è la probabilità (approssimata) che il candidato B vinca le elezioni?

SOLUZIONE.
Sia $n = 10^6 - 18000$ il numero di elettori che non sono attivisti dell'uno o dell'altro candidato. Poniamo

$$X_i := \begin{cases} 1 & \text{se l'}i\text{-mo elettore vota per il candidato B} \\ -1 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Il candidato B vince se $\sum_{i=1}^n X_i > 2000$. Usando l'approssimazione normale (la correzione di continuità qui è ininfluente, dato il grande valore di n):

$$P\left(\sum_{i=1}^n X_i > 2000\right) = P\left(\sqrt{n}\overline{X}_n > \frac{2000}{\sqrt{n}}\right) \simeq P\left(N(0,1) > \frac{2000}{\sqrt{n}}\right) \simeq 0.022.$$

ESERCIZIO 4. Tre urne contengono ognuna 10 palline. Due di esse contengono 5 palline rosse e 5 blu, la terza 3 palline rosse e 7 blu. Non sappiamo però quale delle tre urne sia quella con 3 palline rosse. Estraiamo 2 palline da ognuna delle tre urne, ottenendo il seguente risultato: da un'urna abbiamo estratto una pallina rossa e una blu, da un'altra due palline rosse a dalla terza due palline blu. Qual è la probabilità che l'urna da cui abbiamo estratto due palline blu sia quella contenente tre palline rosse?

SOLUZIONE.

Chiamiamo U_1 l'urna da cui abbiamo estratto una pallina rossa e una blu, U_2 quella da cui abbiamo estratto due palline rosse, e U_3 la rimanente. Per $i = 1, 2, 3$, denotiamo con A_i l'eventi "l'urna contenente 3 palline rosse è l'urna U_i". Sia inoltre B l'evento " da un'urna abbiamo estratto una pallina rossa e una blu, da un'altra due palline rosse a dalla terza due palline blu". Abbiamo:

$$
\begin{aligned}
P(A_3|B) = & \frac{P(B|A_3)P(A_3)}{P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A_2) + P(B|A_3)P(A_3)} \\
& = \frac{\frac{25}{\binom{10}{2}} \cdot \frac{\binom{5}{2}}{\binom{10}{2}} \cdot \frac{\binom{7}{2}}{\binom{10}{2}}}{\frac{21}{\binom{10}{2}} \cdot \frac{\binom{5}{2}}{\binom{10}{2}} \cdot \frac{\binom{5}{2}}{\binom{10}{2}} + \frac{25}{\binom{10}{2}} \cdot \frac{\binom{3}{2}}{\binom{10}{2}} \cdot \frac{\binom{5}{2}}{\binom{10}{2}} + \frac{25}{\binom{10}{2}} \cdot \frac{\binom{5}{2}}{\binom{10}{2}} \cdot \frac{\binom{7}{2}}{\binom{10}{2}}} \simeq 0.648.
\end{aligned}
$$