Capitolo 1

Esercizi: fascicolo 1

Esercizio 1 Esprimere ciascuno dei seguenti eventi in termini degli eventi A, B, C (ad esempio "si verifica A o B" $= A \cup B$).

1. Almeno un evento si verifica.
2. Al più un evento si verifica.
3. Nessun evento si verifica.
4. Tutti gli eventi si verificano.
5. Si verifica esattamente un evento.
6. Due eventi su tre si verificano.
7. O si verifica A, oppure, se non si verifica A, neppure B si verifica.

Esercizio 2 Siano A, B eventi. Mostrare che

$$P(A\Delta B) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B).$$

Esercizio 3 Siano A, B, C tre eventi. Mostrare che

$$P(A\Delta C) \leq P(A\Delta B) + P(B\Delta C).$$

Mostrare inoltre che l'uguaglianza vale se e solo se $P[(A\Delta B) \cap (B\Delta C)] = 0$.

Esercizio 4 a. Siano A e B due eventi arbitrari. Mostrare la disuguaglianza

$$P(A \cap B) \geq P(A) + P(B) - 1.$$

b. Mostrare per induzione che per ogni n-pla di eventi $A_1, A_2, \ldots, A_n$, con $n \geq 2$ si ha

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) \geq \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - (n-1).$$

Esercizio 5 Siano A, B due eventi arbitrari.

a. Mostrare che
$$P(A)P(A^c) \leq \frac{1}{4}.$$

b.* Mostrare che
$$P(A \cap B) \leq P(A)P(B) + \frac{1}{4}.$$

Esercizio 6 Da un mazzo di 52 carte si estraggono, a caso, tre carte. Calcolare la probabilità che:

a. tra le carte estratte vi sia almeno un asso;
b. le tre carte estratte siano di tre semi diversi;
c. almeno due delle carte estratte abbiano lo stesso numero o figura.

Esercizio 7 Un mazzo di 52 carte viene diviso a metà. Si determini la probabilità che ognuna delle due parti contenga carte rosse e nere in egual numero.

Esercizio 8 Si mescola accuratamente un mazzo di 52 carte da Poker.

a. Calcolare la probabilità che le prime due carte del mazzo siano rispettivamente l'asso e il due di fiori;

b. Calcolare la probabilità che tra le prime dieci carte del mazzo non vi siano carte di fiori.

Esercizio 9 Si consideri un mazzo di 52 carte da Poker, e si scelgano *a caso* 5 carte. Calcolare la probabilità che:

a. nelle 5 carte ci sia *almeno* una coppia (cioè due carte di semi diversi ma con lo stesso numero o figura);

b. nelle 5 carte ci sia *esattamente* una coppia, cioè ci sia una coppia ma nessuna combinazione migliore (doppia coppia, tris....)

Esercizio 10 Una lotteria emette n biglietti, di cui $m < n$ sono vincenti. Qual è la probabilità che un possessore di r biglietti ne abbia almeno uno di vincente?

Esercizio 11 Si lanciano 12 dadi. Qual è la probabilità che ognuno dei numeri $1, 2, 3, 4, 5, 6$ compaia esattamente 2 volte?

Esercizio 12 n paia di guanti vengono mescolate, e poi distribuite a caso a n persone. Qual è la probabilità che ognuno riceva un guanto per la mano destra e uno per la sinistra?

Esercizio 13 Si scelgano, a caso, due numeri dall'insieme $\{1, 2, \ldots, n\}$. fissato $k \in \{2, \ldots, n-1\}$, qual è la probabilità che i due numeri scelti siano uno strettamente più grande e uno strettamente più piccolo di k?

Esercizio 14 Si considerino i numeri $\{1, 2, \ldots, n\}$ e si esegua una permutazione casuale di essi. Qual è la probabilità che 1 e 2 siano successivi anche dopo la permutazione?

Esercizio 15 Si considerino n persone selezionate in modo casuale. Quanto grande dev'essere n affinchè la probabilità che almeno due di essi compiano gli anni lo stesso giorno sia maggiore di $1/2$?

Esercizio 16 Si supponga di avere un mazzo di n chiavi diverse. Dovendo aprire una serratura di cui si ha la chiave, si provano a caso le n chiavi, mettendo da parte quello già provate, fino a che non si è trovata la chiave giusta. Qual è la probabilità di trovare la chiave giusta dopo k tentativi, con $1 \leq k \leq n$?

Esercizio 17 21 passeggeri salgono su un treno della metropolitana vuoto formato da 3 vagoni, e ognuno sceglie a caso il vagone su cui viaggiare. Si calcoli la probabilità che

1. ci siano 4 passeggeri nel primo vagone;

2. i passeggeri siano uniformemente distribuiti sui 3 vagoni;

3. 5 persone siano su un vagone, 6 su un altro e 10 sul rimanente.

Esercizio 18 Siano Ω_1 e Ω_2 due insiemi finiti, sia P_1 la probabilità uniforme su Ω_1 e P la probabilità uniforme su $\Omega_1 \times \Omega_2$. Mostrare che se $A \subset \Omega_1$

$$P_1(A) = P(A \times \Omega_2).$$

Esercizio 19 Un'urna contiene $2n$ palline, n rosse e n verdi. Si effettuano una serie di estrazioni successive, che possono avvenire con due diverse modalità: *senza reimmissione*, cioè la pallina estratta non viene reinserita nell'urna prima dell'estrazione successiva; *con reimmissione*, cioè la pallina estratta viene immediatamente reinserita nell'urna. Supponiamo di effettuare m estrazioni successive, con $m \leq n$.

a. Descrivere gli spazi campionari relativi ai due schemi di estrazione (è conveniente considerare che le palline siano distinguibili, ad esempio numerate da 1 a n quelle rosse e da $n+1$ a $2n$ quelle verdi).

b. Sia, per $0 \leq k \leq m$, A_k l'evento corrispondente all'affermazione "le prime k palline estratte sono rosse e la $k+1$-ma è verde". Assumiamo effettiva casualità nelle estrazioni, cioè che la probabilità sia quella uniforme. Calcolare i valori di $P(A_k)$ per entrambi gli schemi di estrazione.

Esercizio 20 Sia S_n l'insieme delle permutazioni di $\{1, 2, \ldots, n\}$. Dati $\sigma \in S_n$ e $I \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$, diciamo che I è *stabile* per σ se $\sigma(i) \in I$ per ogni $i \in I$. Denotiamo con $A_I \subseteq S_n$ l'insieme delle permutazioni per le quali I è stabile. Se P è la probabilità uniforme su S_n, calcolare $P(A_I)$.

Esercizio 21 Fissato $n \geq 1$, consideriamo i punti del piano cartesiano $O = (0, 0)$ e $A = (2n, 2n)$. Consideriamo un cammino uscente da O in cui ad ogni "passo" ci si può muovere di un'unità verso destra o di un'unità verso l'alto. Un cammino che congiunge O e A è chiaramente un cammino di $4n$ passi in cui in esattamente $2n$ passi si va a destra, negli altri $2n$ verso l'alto. Sia Ω l'insieme dei cammini di $4n$ passi che congiungono O e A.

a. Quanto vale $|\Omega|$?

b. Sia E l'insieme dei cammini in Ω che passano per il punto $B = (n, n)$. Se P è la probabilità uniforme su Ω, calcolare $P(E)$.

Esercizio 22 Si eseguano n estrazioni casuali *con reimmissione* da un'urna contenente $2n$ oggetti distinti. Sia p_n la probabilità che gli n oggetti estratti siano tutti diversi.

a. Determinare p_n.

b. Usando la formula di Stirling, si determini il comportamento asintotico di p_n per $n \to +\infty$. In particolare, si mostri che $p_n \sim c\rho^n$ (nel senso che $\lim_n p_n/c\rho^n = 1$), e determinare i valori di c e ρ (formula di Stirling: $n! \sim n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$).