

Traccia della soluzione degli esercizi del fascicolo 1

Esercizio 1 Esprimere ciascuno dei seguenti eventi in termini degli eventi A, B, C (ad esempio “si verifica A o B ” = $A \cup B$).

1. Almeno un evento si verifica.
2. Al più un evento si verifica.
3. Nessun evento si verifica.
4. Tutti gli eventi si verificano.
5. Si verifica esattamente un evento.
6. Due eventi su tre si verificano.
7. O si verifica A , oppure, se non si verifica A , neppure B si verifica.

Soluzione.

1. $A \cup B \cup C$.
2. $(A \cap B^c \cap C^c) \cup (A^c \cap B \cap C^c) \cup (A^c \cap B^c \cap C) \cup (A^c \cap B^c \cap C^c)$.
3. $A^c \cap B^c \cap C^c$.
4. $A \cap B \cap C$.
5. $(A \cap B^c \cap C^c) \cup (A^c \cap B \cap C^c) \cup (A^c \cap B^c \cap C)$.
6. $(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)$
7. $A \cup (A^c \cap B^c)$

Esercizio 2 Siano A, B eventi. Mostrare che

$$P(A \Delta B) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B).$$

Soluzione. Si noti che

$$A \cup B = (A \Delta B) \cup (A \cap B),$$

e quest'ultima è un'unione disgiunta. Perciò

$$P(A \Delta B) = P(A \cup B) - P(A \cap B),$$

e si conclude usando la formula per $P(A \cup B)$.

Esercizio 3 Siano A, B, C tre eventi. Mostrare che

$$P(A\Delta C) \leq P(A\Delta B) + P(B\Delta C).$$

Mostrare inoltre che l'uguaglianza vale se e solo se $P[(A\Delta B) \cap (B\Delta C)] = 0$.

Soluzione. Anzitutto si mostra che

$$A\Delta C \subset (A\Delta B) \cup (B\Delta C),$$

da cui la disuguaglianza segue per subadditività. Inoltre, si osservi che

$$[(A\Delta B) \cup (B\Delta C)] \setminus (A\Delta C) = (A\Delta B) \cap (B\Delta C).$$

Allora valgono le seguenti equivalenze:

$$\begin{aligned} P(A\Delta C) = P[(A\Delta B) \cup (B\Delta C)] &\iff P\{[(A\Delta B) \cup (B\Delta C)] \setminus (A\Delta C)\} = 0 \iff \\ &\iff P[(A\Delta B) \cap (B\Delta C)] = 0 \iff P[(A\Delta B) \cup (B\Delta C)] = P[(A\Delta B)] + P[(B\Delta C)]. \end{aligned}$$

Ne segue

$$P(A\Delta C) = P[(A\Delta B)] + P[(B\Delta C)] \iff P[(A\Delta B) \cap (B\Delta C)] = 0.$$

Esercizio 4 a. Siano A e B due eventi arbitrari. Mostrare la disuguaglianza

$$P(A \cap B) \geq P(A) + P(B) - 1.$$

b. Mostrare per induzione che per ogni n -pla di eventi $A_1, A_2, \dots, A_n$, con $n \geq 2$ si ha

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) \geq \sum_{i=1}^n P(A_i) - (n-1).$$

Soluzione.

a. Basta osservare che

$$1 \geq P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

b. L'abbiamo dimostrato per $n = 2$ inoltre, per $n > 2$,

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) &= P[(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}) \cap A_n] \geq P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}) + P(A_n) - 1 \\ &\geq \sum_{i=1}^{n-1} P(A_i) - (n-2) + P(A_n) - 1 = \sum_{i=1}^n P(A_i) - (n-1), \end{aligned}$$

dove abbiamo prima usato il risultato per $n = 2$ e poi l'ipotesi induttiva.

Esercizio 5 Siano A, B due eventi arbitrari.

a. Mostrare che

$$P(A)P(A^c) \leq \frac{1}{4}.$$

b.* Mostrare che

$$P(A \cap B) \leq P(A)P(B) + \frac{1}{4}.$$

Soluzione.

a. Posto $x = P(A)$, basta osservare che

$$x(1-x) \leq 1/4$$

per $x \in [0, 1]$.

b. Dal punto a.

$$\frac{1}{4} \geq P(A \cap B)[1 - P(A \cap B)] \geq P(A \cap B)[1 - P(A)],$$

che implica

$$P(A \cap B) \leq P(A \cap B)P(A) + \frac{1}{4} \leq P(B)P(A) + \frac{1}{4}.$$

Esercizio 6 Da un mazzo di 52 carte si estraggono, a caso, tre carte. Calcolare la probabilità che:

- a. tra le carte estratte vi sia almeno un asso;
- b. le tre carte estratte siano di tre semi diversi;
- c. almeno due delle carte estratte abbiano lo stesso numero o figura.

Soluzione.

a. Ω è l'insieme dei sottoinsiemi di tre elementi del mazzo di 52 carte, quindi $|\Omega| = \binom{52}{3}$. Il numero di modi di scegliere 3 carte in modo che non vi sia alcun asso è $\binom{48}{3}$. Quindi, la probabilità richiesta è

$$1 - \frac{\binom{48}{3}}{\binom{52}{3}}.$$

b. Sia A l'evento di cui dobbiamo calcolare la probabilità. Scegliere un elemento di A significa i) scegliere 3 dei 4 colori disponibili ($\binom{4}{3}$ scelte) ii) una volta scelti i colori, ognuna delle 3 carte può essere scelta in 13 modi possibili. Dunque

$$|A| = \binom{4}{3} 13^3$$

che, divisa per $|\Omega|$, dà la probabilità richiesta.

c. Se B è l'evento di cui dobbiamo calcolare la probabilità, B^c = le tre carte scelte hanno numero diverso. Scegliere un elemento di B^c significa scegliere i) tre numeri tra i 13 disponibili ($\binom{13}{3}$ scelte) ii) fissati i tre numeri ogni carta può essere scelta in 4 modi diversi. Dunque

$$P(B) = 1 - P(B^c) = 1 - \frac{\binom{13}{3} 4^3}{\binom{52}{3}}.$$

Esercizio 7 Un mazzo di 52 carte viene diviso a metà. Si determini la probabilità che ognuna delle due parti contenga carte rosse e nere in egual numero.

Soluzione.

Ci sono $\binom{52}{26}$ modi di scegliere 26 carte tra 52, quindi $\binom{52}{26}$ modi di dividere il mazzo (*casi possibili*). Ci sono esattamente 26 carte rosse tra le 52 carte, se ognuna delle due parti del mazzo deve contenere carte rosse e nere in egual numero, ognuna dovrà contenere 13 carte rosse. Scelgo quindi le 13 carte rosse di una parte in $\binom{26}{13}$ modi e le rimanenti 13 carte tra le 26 nere in $\binom{26}{13}$ modi. In definitiva:

$$P(\text{ciascuna parte contiene carte rosse in egual numero}) = \frac{\binom{26}{13}\binom{26}{13}}{\binom{52}{26}} \simeq 0.218126.$$

Esercizio 8 Si mescola accuratamente un mazzo di 52 carte da Poker.

a. Calcolare la probabilità che le prime due carte del mazzo siano rispettivamente l'asso e il due di fiori;

b. Calcolare la probabilità che tra le prime dieci carte del mazzo non vi siano carte di fiori.

Soluzione.

a. Possiamo scegliere Ω = insieme delle permutazioni di 52 elementi. Dunque $|\Omega| = 52!$. Se A = “le prime due carte sono rispettivamente l'asso e il due di fiori, si vede che $|A| = 50!$, visto che le prime due carte sono fissate e ho libertà di scegliere l'ordine delle altre 50. Dunque

$$P(A) = \frac{50!}{52!} = \frac{1}{52 \cdot 51}.$$

b. Se B è l'evento in questione, per ogni elemento di B posso scegliere arbitrariamente le prime 10 carte tra le 39 che non sono di fiori. Ciò può essere fatto in $39 \cdot 38 \cdots 30$ modi. Una volta operata tale scelta, le 42 carte restanti possono essere disposte arbitrariamente, dunque in $42!$ modi diversi. Allora:

$$P(B) = \frac{39 \cdot 38 \cdots 30 \cdot 42!}{52!} = \frac{\binom{39}{10}}{\binom{52}{10}}.$$

Allo stesso risultato avremmo potuto arrivare anche osservando che gli insiemi (non ordinati) delle prime 10 carte del mazzo hanno tutti la stessa probabilità. Perciò, definendo Ω = “insieme dei sottoinsiemi di 10 carte”, saremmo facilmente giunti allo stesso risultato.

Esercizio 9 Si consideri un mazzo di 52 carte da Poker, e si scelgano *a caso* 5 carte. Calcolare la probabilità che:

a. nelle 5 carte ci sia *almeno* una coppia (cioè due carte di semi diversi ma con lo stesso numero o figura);

b. nelle 5 carte ci sia *esattamente* una coppia, cioè ci sia una coppia ma nessuna combinazione migliore (doppia coppia, tris....)

Soluzione. Sia S l'insieme delle 52 carte, $\Omega := \{A \subseteq S : |A| = 5\}$, P la probabilità uniforme sui sottoinsiemi di Ω .

a. Sia E = “nelle cinque carte estratte non c'è nessuna coppia”. La scelta di un elemento di E^c può essere eseguita in due passi:

1. Si scelgono 5 numeri o figure *distinti*; questo può essere fatto in $\binom{13}{5}$ modi diversi.
2. Una volta eseguita la scelta in 1., si tratta di scegliere per ognuno dei 5 numeri o figure uno dei 4 rappresentanti; questo comporta 4^5 scelte distinte.

Abbiamo quindi visto che $|E^c| = 4^5 \binom{13}{5}$. Pertanto

$$P(E) = 1 - \frac{4^5 \binom{13}{5}}{\binom{52}{5}} \simeq 0,492917167.$$

b. Sia F l'evento in questione. La scelta di un elemento di F si può eseguire in tre passi:

1. si sceglie il numero o figura per la coppia (13 scelte);
2. fissata la scelta in 1. si scelgono le due carte per la coppia ($\binom{4}{2}$ scelte);
3. fissate le scelte in 1. e 2. si scelgono 3 carte con numeri o figure distinti e diversi da quello usato per la coppia. Il numero di scelte si determina come al punto a., ma con 48 carte invece di 52 e 3 carte scelte invece di 5 ($4^3 \binom{12}{3}$ scelte).

Quindi

$$P(F) = \frac{13 \binom{4}{2} 4^3 \binom{12}{3}}{\binom{52}{5}} \simeq 0,422569028.$$

Esercizio 10 Una lotteria emette n biglietti, di cui $m < n$ sono vincenti. Qual è la probabilità che un possessore di r biglietti ne abbia almeno uno di vincente?

Soluzione. Possiamo scegliere Ω = insieme dei sottoinsiemi di r elementi dell'insieme degli n biglietti. Se A è l'evento in questione, A^c è l'insieme dei sottoinsiemi di r elementi degli $n - m$ biglietti non vincenti. Allora

$$P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - \frac{\binom{n-m}{r}}{\binom{n}{r}}.$$

Esercizio 11 Si lanciano 12 dadi. Qual è la probabilità che ognuno dei numeri 1, 2, 3, 4, 5, 6 compaia esattamente 2 volte?

Soluzione. Si sceglie $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^{12}$. Se A è l'evento in questione, scegliere un elemento di A significa scegliere i due dadi che danno 1, quindi i due che danno 2, e così via. Allora

$$P(A) = \frac{\binom{12}{2} \binom{10}{2} \binom{8}{2} \binom{6}{2} \binom{4}{2}}{6^{12}}.$$

Esercizio 12 n paia di guanti vengono mescolate, e poi distribuite a caso a n persone. Qual è la probabilità che ognuno riceva un guanto per la mano destra e uno per la sinistra?

Soluzione. Supponiamo di distribuire prima i primi n guanti alle n persone, poi gli altri n . Sia Ω l'insieme delle permutazioni dei $2n$ guanti. Supponiamo di numerarli da 1 a $2n$, da 1 a n i guanti destri. Se A è l'evento in questione, una permutazione σ appartiene ad A se e solo se

manda $\{1, 2, \dots, n\}$ in sè, oppure $\{1, 2, \dots, n\}$ in $\{n+1, n+2, \dots, 2n\}$. L'insieme delle permutazioni che mandano $\{1, 2, \dots, n\}$ in sè ha cardinalità $(n!)^2$ (numero di permutazioni dei guanti destri $\times$ numero di permutazioni dei guanti sinistri), e lo stesso per quelle che mandano $\{1, 2, \dots, n\}$ in $\{n+1, n+2, \dots, 2n\}$. Dunque $|A| = 2(n!)^2$, e

$$P(A) = \frac{2(n!)^2}{(2n)!}.$$

Esercizio 13 Si scelgano, a caso, due numeri dall'insieme $\{1, 2, \dots, n\}$. fissato $k \in \{2, \dots, n-1\}$, qual è la probabilità che i due numeri scelti siano uno strettamente più grande e uno strettamente più piccolo di k ?

Soluzione. Sia Ω l'insieme dei sottoinsiemi di due elementi di $\{1, 2, \dots, n\}$. L'evento in questione corrisponde alla scelta di un numero $< k$ ($k-1$ scelte) e uno $> k$ ($n-k$ scelte). Dunque

$$P(A) = \frac{(k-1)(n-k)}{\binom{n}{2}}.$$

Esercizio 14 Si considerino i numeri $\{1, 2, \dots, n\}$ e si esegua una permutazione casuale di essi. Qual è la probabilità che 1 e 2 siano successivi anche dopo la permutazione?

Soluzione. Sia Ω l'insieme delle permutazioni degli n numeri. Per le permutazioni σ dell'evento A in questione, vi sono $n-1$ modi diversi di scegliere $\sigma(1)$, che determina anche il valore di $\sigma(2)$, mentre gli altri $\sigma(i)$, $i > 2$ si possono scegliere a piacere in $\{1, 2, \dots, n\} \setminus \{\sigma(1), \sigma(2)\}$, il che si può fare in $(n-2)!$ modi diversi. Dunque

$$P(A) = \frac{(n-1)(n-2)!}{n!} = \frac{1}{n}.$$

Esercizio 15 Si considerino n persone selezionate in modo casuale. Quanto grande dev'essere n affinché la probabilità che almeno due di essi compiano gli anni lo stesso giorno sia maggiore di $1/2$?

Soluzione. Sia $\Omega = \{1, 2, \dots, 365\}^n$ l'insieme delle possibili scelte dei giorni di compleanno, e A l'insieme degli elementi di Ω in cui almeno due componenti sono uguali. Il numero di elementi di A^c è $365 \cdot 364 \cdots (365 - n + 1)$, da cui

$$P(A) = 1 - \frac{365 \cdot 364 \cdots (365 - n + 1)}{365^n}.$$

Posto $a_n := \frac{365 \cdot 364 \cdots (365 - n + 1)}{365^n}$, con un facile calcolo si vede che $a_{n+1}/a_n \geq 1$ per ogni n . Pertanto $P(A)$ è decrescente in n ; con verifica diretta, si vede che è maggiore di $1/2$ per $n = 22$ e minore di $1/2$ per $n = 23$, che dunque è il numero minimo cercato.

Esercizio 16 Si supponga di avere un mazzo di n chiavi diverse. Dovendo aprire una serratura di cui si ha la chiave, si provano a caso le n chiavi, mettendo da parte quello già provate, fino a che non si è trovata la chiave giusta. Qual è la probabilità di trovare la chiave giusta dopo k tentativi, con $1 \leq k \leq n$?

Soluzione. Sia Ω l'insieme delle permutazioni delle n chiavi, e supponiamo che la chiave giusta sia la numero 1. L'evento in questione è $\{\sigma \in \Omega : \sigma(1) = k\}$, che ha cardinalità $(n-1)!$. Da ciò segue subito che la probabilità richiesta è $(n-1)!/n! = 1/n$.

Esercizio 17 21 passeggeri salgono su un treno della metropolitana vuoto formato da 3 vagoni, e ognuno sceglie a caso il vagone su cui viaggiare. Si calcoli la probabilità che

1. ci siano 4 passeggeri nel primo vagone;
2. i passeggeri siano uniformemente distribuiti sui 3 vagoni;
3. 5 persone siano su un vagone, 6 su un altro e 10 sul rimanente.

Soluzione.

Ogni passeggero può scegliere tra 3 vagoni, quindi i casi possibili sono 3^{21} . Calcoliamo i casi favorevoli dei vari punti.

1. Scelgo i 4 passeggeri che siederanno nel 1° vagone tra i 21 in $\binom{21}{4}$ modi. Rimangono $21-4 = 17$ passeggeri che vanno disposti nei rimanenti 2 vagoni in 2^{17} modi, per un totale di $\binom{21}{4}2^{17}$ casi favorevoli. La probabilità cercata è:

$$\frac{\binom{21}{4}2^{17}}{3^{21}} \simeq 0.0749942.$$

2. Ci devono essere 7 passeggeri per ogni vagone. I casi favorevoli sono allora:

$$\binom{21}{7} \binom{21-7}{7} \binom{21-7-7}{7} = \frac{21!}{7!14!} \frac{14!}{7!7!} \frac{7!}{7!0!} = \frac{21!}{(7!)^3}.$$

La probabilità cercata è:

$$\frac{21!}{(7!)^3 3^{21}} \simeq 0.038151.$$

3. Conto prima il numero di casi favorevoli all'evento 5 sul I vagone, 6 sul II e 10 sul III. Si hanno

$$\binom{21}{5} \binom{21-5}{6} \binom{21-5-6}{10}$$

casi. Ora moltiplicando questo numero per $3!$, cioè il numero di modi di permutare i 3 vagoni ottengo i casi favorevoli, e la probabilità cercata è:

$$\frac{\binom{21}{5} \binom{16}{6} 3!}{3^{21}} \simeq 0.09347.$$

Esercizio 18 Siano Ω_1 e Ω_2 due insiemi finiti, sia P_1 la probabilità uniforme su Ω_1 e P la probabilità uniforme su $\Omega_1 \times \Omega_2$. Mostrare che se $A \subset \Omega_1$

$$P_1(A) = P(A \times \Omega_2).$$

Soluzione. È ovvio una volta osservato che

$$|A \times \Omega_2| = |A||\Omega_2|.$$

Esercizio 19 Un'urna contiene $2n$ palline, n rosse e n verdi. Si effettuano una serie di estrazioni successive, che possono avvenire con due diverse modalità: *senza reimmissione*, cioè la pallina estratta non viene reinserita nell'urna prima dell'estrazione successiva; *con reimmissione*, cioè la pallina estratta viene immediatamente reinserita nell'urna. Supponiamo di effettuare m estrazioni successive, con $m \leq n$.

- Descrivere gli spazi campionari relativi ai due schemi di estrazione (è conveniente considerare che le palline siano distinguibili, ad esempio numerate da 1 a n quelle rosse e da $n+1$ a $2n$ quelle verdi).
- Sia, per $0 \leq k \leq m$, A_k l'evento corrispondente all'affermazione "le prime k palline estratte sono rosse e la $k+1$ -ma è verde". Assumiamo effettiva casualità nelle estrazioni, cioè che la probabilità sia quella uniforme. Calcolare i valori di $P(A_k)$ per entrambi gli schemi di estrazione.

Soluzione.

- Nello schema senza reimmissione

$$\Omega = \{(x_1, \dots, x_m) \in \{1, \dots, 2n\}^m : x_i \neq x_j \text{ se } i \neq j\}.$$

Nello schema con reimmissione

$$\Omega = \{1, \dots, 2n\}^m.$$

- Iniziamo con lo schema senza reimmissione. $|A_k|$ è il numero di m -ple ordinate in Ω con elementi in $\{1, \dots, n\}$ ai primi k posti e un elemento in $\{n+1, \dots, 2n\}$ al posto $k+1$. Pertanto

$$|A_k| = n(n-1) \cdots (n-k+1)n(2n-k-1) \cdots (2n-m+1)$$

da cui

$$P(A_k) = \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)n(2n-k-1) \cdots (2n-m+1)}{2n(2n-1) \cdots (2n-m+1)} = \frac{n^2(n-1) \cdots (n-k+1)}{2n(2n-1) \cdots (2n-k)}.$$

Nel caso di estrazioni con reimmissione:

$$|A_k| = n(k+1)(2n)^{m-k-1},$$

da cui

$$P(A_k) = \frac{n(k+1)(2n)^{m-k-1}}{(2n)^m} = \frac{1}{2^{k+1}}$$

(confrontare il risultato con il problema del primo successo nello schema di Bernoulli).

Esercizio 20 Sia S_n l'insieme delle permutazioni di $\{1, 2, \dots, n\}$. Dati $\sigma \in S_n$ e $I \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$, diciamo che I è *stabile* per σ se $\sigma(i) \in I$ per ogni $i \in I$. Denotiamo con $A_I \subseteq S_n$ l'insieme delle permutazioni per le quali I è stabile. Se P è la probabilità uniforme su S_n , calcolare $P(A_I)$.

Soluzione. Si osservi che I è stabile per σ se e solo se σ è dato dalla composizione di una permutazione di I con una permutazione di I^c . Quindi $|A_I| = |I|!(n - |I|)!$, da cui

$$P(A_I) = \frac{|I|!(n - |I|)!}{n!} = \frac{1}{\binom{n}{|I|}}.$$

Esercizio 21 Fissato $n \geq 1$, consideriamo i punti del piano cartesiano $O = (0, 0)$ e $A = (2n, 2n)$. Consideriamo un cammino uscente da O in cui ad ogni “passo” ci si può muovere di un'unità verso destra o di un'unità verso l'alto. Un cammino che congiunge O e A è chiaramente un cammino di $4n$ passi in cui in esattamente $2n$ passi si va a destra, negli altri $2n$ verso l'alto. Sia Ω l'insieme dei cammini di $4n$ passi che congiungono O e A .

- Quanto vale $|\Omega|$?
- Sia E l'insieme dei cammini in Ω che passano per il punto $B = (n, n)$. Se P è la probabilità uniforme su Ω , calcolare $P(E)$.

Soluzione.

- $|\Omega|$ è dato dal numero di modi di scegliere il sottoinsieme di $2n$ elementi dei $4n$ passi in cui spostarsi a destra, cioè $\binom{4n}{2n}$.
- Un elemento di E è dato dalla concatenazione di un cammino da O a B con un cammino da B a A . Il numero di cammini da O a B (uguale al numero di quelli da B ad A) si calcola come al punto a., con n al posto di $2n$. Ne segue

$$P(E) = \frac{|E|}{|\Omega|} = \frac{\binom{2n}{n}^2}{\binom{4n}{2n}}.$$

Esercizio 22 Si eseguano n estrazioni casuali *con reimmissione* (vedi Esercizio 19) da un'urna contenente $2n$ oggetti distinti. Sia p_n la probabilità che gli n oggetti estratti siano tutti diversi.

- Determinare p_n .
- Usando la formula di Stirling, si determini il comportamento asintotico di p_n per $n \rightarrow +\infty$. In particolare, si mostri che $p_n \sim c\rho^n$ (nel senso che $\lim_n p_n/c\rho^n = 1$), e determinare i valori di c e ρ .

Soluzione.

- a. Il numero di sequenze di n estrazioni in cui gli oggetti estratti siano tutti diversi è

$$2n(2n-1)\cdots(n+1) = \frac{(2n)!}{n!}.$$

Perciò

$$p_n = \frac{(2n)!}{n!(2n)^n}.$$

- b. Usando la Formula di Stirling

$$p_n = \frac{\sqrt{4\pi n}(2n)^{2n}e^{-2n}e^{\theta(2n)/12n}}{\sqrt{2\pi n}n^n e^{-n}e^{\theta(n)/12n}(2n)^n} \sim \sqrt{2} \left(\frac{2}{e}\right)^n,$$

cioè $c = \sqrt{2}$ e $\rho = 2/e$.