Traccia delle soluzioni degli esercizi del fascicolo 2

Esercizio 1 Si lanciano due dadi. Qual è la probabilità di ottenere almeno un 6 sapendo che la somma dei punteggi ottenuti è 9?
Soluzione. Sia A = si ottiene almeno un sei e B = la somma dei punteggio ottenuti è nove. $|A \cap B| = 2$, $|B| = 4$, da cui $P(A|B) = 1/2$.

Esercizio 2 Siano A, B due eventi. Sapendo che $P(A|B) = 0.7$, $P(A|B^c) = 0.3$ e $P(B|A) = 0.6$, calcolare $P(A)$.
Soluzione. Posto $x = P(A)$, $y = P(B)$, per la formula delle probabilità totali

$$x = P(A|B)P(B) + P(A|B^c)P(B^c) = 0.7y + 0.3(1 - y).$$

Inoltre, per la formula di Bayes,

$$0.6 = P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)} = \frac{0.7y}{x}.$$

Abbiamo ottenuto allora un sistema lineare in x, y, che si risolve ottenendo $x = 21/46$.

Esercizio 3 Mostrare, con degli esempi, che entrambe le disuguaglianze $P(A|B) > P(A)$ e $P(A|B) < P(A)$ sono possibili.
Soluzione. Per il primo caso, basta considerare un evento B con $0 < P(B) < 1$ e prendere $A = B$. Per il secondo, si prenda un B come sopra, e $A = B^c$.

Esercizio 4 Siano A e B due eventi con probabilità non nulla. Diciamo che A *è positivamente correlato a* B se

$$P(A|B) \geq P(A).$$

Mostrare che le seguenti tre affermazioni sono equivalenti.

a) A *è positivamente correlato a* B.

b) B *è positivamente correlato a* A.

c) A^c *è positivamente correlato a* B^c.

Soluzione. Si osservi che

$$P(A|B) \geq P(A) \iff P(A \cap B) \geq P(A)P(B) \iff P(B|A) \geq P(B),$$

che dimostra a) $\iff$ b). Inoltre

$$\begin{aligned} P(A|B) \geq P(A) &\iff P(A \cap B) \geq P(A)P(B) \\ &\iff P(A) - P(A \cap B^c) \geq P(A)[1 - P(B^c)] \iff P(A \cap B^c) \leq P(A)P(B^c). \end{aligned}$$

Ripetendo lo stesso argomento si trova

$$P(A \cap B^c) \leq P(A)P(B^c) \iff P(A^c \cap B^c) \geq P(A^c)P(B^c).$$

Mettende assieme queste ultime due equivalenze si conclude che a) $\iff$ c).

Esercizio 5 Sia S_{4n} l'insieme delle permutazioni di $\{0,1,2,\ldots,4n-1\}$, con $n \geq 1$, e sia P la probabilità uniforme su S_{4n}. Si considerino gli eventi:

$$A = \{\sigma \in S_{4n} : \text{ per ogni } k \text{ pari, } \sigma(k) \text{ è pari}\}$$

$$B = \{\sigma \in S_{4n} : \text{ per ogni } k \leq 2n-1,\ \sigma(k) \leq 2n-1\}.$$

Calcolare $P(A), P(B)$ e $P(A|B)$.
Soluzione. Si noti, anzitutto, che $|S_{4n}| = (4n)!$. Definiamo:

$$\begin{aligned} E_1 &= \text{ insieme dei numeri pari in } \{0,1,2,\ldots,4n-1\} \\ E_2 &= \{0,1,2,\ldots,4n-1\} \setminus E_1 \\ E_3 &= \{0,1,2,\ldots,2n-1\} \\ E_4 &= \{0,1,2,\ldots,4n-1\} \setminus E_3. \end{aligned}$$

Gli insiemi sopra definiti hanno tutti cardinalità $2n$.

Ogni elemento di A si ottiene dalla composizione di una permutazione di E_1 con una di E_2. Ne segue che

$$|A| = (2n)!^2 \Rightarrow P(A) = \frac{(2n)!^2}{(4n)!}.$$

Per la probabilità di B si ottiene lo stesso valore, scambiando E_1 e E_2 con E_3 e E_4.

Un elemento di $A \cap B$ si ottiene componendo permutazioni dei 4 insiemi disgiunti $E_1 \cap E_3$, $E_1 \cap E_4$, $E_2 \cap E_3$, $E_2 \cap E_4$, che hanno tutti cardinalità n. Allora

$$|A \cap B| = n!^4.$$

Infine

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{|A \cap B|}{|B|} = \frac{n!^4}{(2n)!^2}.$$

Esercizio 6 Il 2 per mille delle banconote da 50.000 Lire in corcolazione sono false. Una macchina riconosce come false il 98% delle banconote false e, per errore, l'1% di quelle autentiche.

a. Qual è la probabilità che una banconota presa a caso venga rilevata come falsa?

b. Qual è la probabilità che una banconota rilevata come falsa sia, in realtà , autentica?

Soluzione. Siano $A =$ la banconota è falsa, $B =$ la banconota è riconosciuta come falsa.

a.

$$P(B) = P(B|A)P(A) + P(B|A^c)P(A^c) = 0.98 \cdot 0.002 + 0.01 \cdot 0.998.$$

b. Basta usare la Formula di bayes

$$P(A^c|B) = \frac{P(B|A^c)P(A^c)}{P(B)}.$$

Esercizio 7 Siano $A_1, A_2, \ldots, A_n$ eventi indipendenti tali che $P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = 1$. Mostrare che esiste $k \in \{1,2,\ldots,n\}$ tale che $P(A_k) = 1$.
Soluzione. Si ha

$$0 = P(A_1^c \cap \cdots \cap A_n^c) = \prod_{i=1}^{n} P(A_i^c).$$

Perciò $\exists k$ tale che $P(A_k^c) = 0$, cioè $P(A_k = 1)$.

Esercizio 8 Un'urna contiene M palline, di cui M_1 bianche.

a. Si effettuano n estrazioni successive, *con* reintroduzione. Si considerino gli eventi

$$B_j = \text{"la } j\text{-esima pallina estratta è bianca"}$$

$$A_m = \text{"delle } n \text{ palline estratte esattamente } m \text{ sono bianche"}$$

dove $m \le n$. Calcolare $P(B_j|A_m)$.

b. Calcolare la probabilità condizionata del punto a. nel caso di estrazioni *senza* reintroduzione, supponendo che m sia tale che $P(A_m) > 0$.

Soluzione. Al solo scopo di semplificare la soluzione (ma si potrebbe fare altrimenti) consideriamo la seguente osservazione, valida sia per il punto a. che per il punto b. . Se si considera, nell'insieme Ω delle sequenze possibili di palline estratte, la funzione che scambia la prima pallina estratta con la j-esima, tale funzione è una corrispondenza biunivoca in Ω che manda A_m in sé e B_j in B_1, e quindi $B_j \cap A_m$ in $B_1 \cap A_m$. Poichè, sia in a. che in b., la probabilità su Ω è quella uniforme, tale trasformazione non cambia la probabilità degli eventi. In particolare $P(B_j \cap A_m) = P(B_1 \cap A_m)$. Non 'e dunque restrittivo assumere $j = 1$.

a. Si vede che $B_1 \cap A_m = B_1 \cap A'_m$ dove A'_m = nelle successive $n-1$ estrazioni si estraggono $m-1$ palline bianche. Inoltre B_1 e A'_m sono indipendenti. Perciò

$$P(B_1 \cap A_m) = \frac{M_1}{M}\binom{n-1}{m-1}\left(\frac{M_1}{M}\right)^{m-1}\left(1-\frac{M_1}{M}\right)^{n-m}.$$

Dato che

$$P(A_m) = \binom{n}{m}\left(\frac{M_1}{M}\right)^{m}\left(1-\frac{M_1}{M}\right)^{n-m},$$

si trova facilmente

$$P(B_1|A_m) = \frac{P(B_1 \cap A_m)}{P(A_m)} = \frac{m}{n}.$$

b. Si noti che $P(A_m|B_1)$ coincide con la probabilità che da un'urna contenente $M-1$ palline di cui $M_1 - 1$ bianche si estraggano (senza reintroduzione) $m-1$ palline bianche in $n-1$ estrazioni. Perciò

$$P(A_m|B_1) = \frac{\binom{M_1-1}{m-1}\binom{M-M_1}{n-m}}{\binom{M-1}{n-1}}.$$

Essendo

$$P(A_m) = \frac{\binom{M_1}{m}\binom{M-M_1}{n-m}}{\binom{M}{n}}$$

e

$$P(B_1) = \frac{M_1}{M},$$

con facili calcoli si ha

$$P(B_1|A_m) = \frac{P(A_m|B_1)P(B_1)}{P(A_m)} = \frac{m}{n}.$$

Esercizio 9 Siano A, B, C tre eventi in uno spazio di probabilità discreto $(\Omega, \mathcal{F})$. Si assuma che A, B, C siano indipendenti. Mostrare che

a. $A \cap B$ è indipendente da C.

b. $A \cup B$ è indipendente da C.

Soluzione.

a. Quasi ovvio:

$$P[(A \cap B) \cap C] = P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C) = P(A \cap B)P(C).$$

b. È equivalente dimostrare che $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ è indipendente da C. Poichè gli eventi A^c, B^c, C sono indipendenti, ci siamo ricondotti al caso precedente visto in a.

Esercizio 10 A tre studenti viene posta la stessa domanda. Supponiamo di sapere che il primo risponderà esattamente con probabilità 2/3, il secondo con probabilità 1/2, il terzo con probabilità 1/3. Gli studenti non possono comunicare tra loro.

a. Se solo uno degli studenti dà la risposta esatta, qual è la probabilità che sia stato il primo?

b. Se due studenti hanno dato la risposta esatta, qual è la probabilità che il terzo abbia dato la risposta esatta?

Soluzione. Siano A_i = lo studente i-mo ha dato la risposta esatta, B = solo uno degli studenti ha dato la risposta esatta, C = esattamente due studenti hanno dato la risposta esatta.

a.

$$P(A_1|B) = \frac{P(A_1 \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{2}{3}\frac{1}{2}\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}\frac{1}{2}\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\frac{1}{2}\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\frac{1}{2}\frac{1}{3}}.$$

b.

$$P(A_3|C) = \frac{P(A_3 \cap C)}{P(C)} = \frac{\frac{2}{3}\frac{1}{2}\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\frac{1}{2}\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}\frac{1}{2}\frac{2}{3} + \frac{2}{3}\frac{1}{2}\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\frac{1}{2}\frac{1}{3}}.$$

Esercizio 11 * Un'urna contiene n palline, che possono essere di due colori, rosso e verde. Non abbiamo idea di quante siano le palline rosse, sicchè riteniamo che tutti i possibili valori $k = 1, 2, \ldots, n$ del numero di palline rosse siano equiprobabili.

a. Si estrae una pallina dall'urna, che si rivela essere rossa. Sapendo ciò, per quale valore di k la probabilità che nell'urna vi fossero k palline rosse è massimizzata?

b. Si risponda alle medesima domanda posta in a., ma assumendo che dall'urna siano state estratte due palline, una rossa e una verde.

Soluzione. Siano A_k = nell'urna ci sono k palline rosse, B = la prima pallina estratta è rossa, C = le prime due palline estratte sono una rossa e una verde. Si noti che

$$P(B|A_k) = \frac{k}{n},\ P(C|A_k) = \frac{k(n-k)}{\binom{n}{2}},\ P(A_k) = \frac{1}{n}.$$

a.

$$P(A_k|B) = \frac{P(B|A_k)P(A_k)}{P(B)} = \frac{\frac{k}{n}\frac{1}{n}}{P(B)},$$

che assume il valore massimo per $k = n$.

b.

$$P(A_k|C) = \frac{P(C|A_k)P(A_k)}{P(C)} = \frac{\frac{k(n-k)}{\binom{n}{2}}\frac{1}{n}}{P(C)},$$

che assume il valore massimo per $k = n/2$ se n è pari, altrimenti per $k = \frac{n}{2} \pm \frac{1}{2}$.

Esercizio 12 Ho un'urna inizialmente vuota e un insieme di palline numerate coi numeri naturali. Il primo giorno inserisco nell'urna le palline numero 1 e 2, dopodiché ne estraggo una a caso (nell'urna rimane dunque una sola pallina). Il secondo giorno inserisco nell'urna le palline numero 3 e 4, dopodiché estraggo a caso una delle tre palline contenute nell'urna. Itero dunque la procedura: l'i-esimo giorno inserisco nell'urna le palline numero $2i-1$ e $2i$, dopodiché estraggo a caso una delle $i+1$ palline contenute nell'urna.

Si introduca per $i \in \mathbb{N}$ l'evento

$$A_i := \text{la pallina numero 1 è presente nell'urna alla fine dell'}i\text{-esimo giorno}\,.$$

a) Si spieghi perchè vale l'inclusione $A_{i+1} \subseteq A_i$ per ogni $i \in \mathbb{N}$ e si deduca la formula

$$P(A_n) \;=\; P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdots P(A_n|A_{n-1})\,, \qquad n \in \mathbb{N}\,.$$

b) Si mostri che $P(A_n) = \frac{1}{n+1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Soluzione.

a) L'inclusione $A_{i+1} \subseteq A_i$ è equivalente a $A_i^c \subseteq A_{i+1}^c$, che è immediatamente verificata: infatti se la pallina numero 1 non è presente nell'urna alla fine dell'i-esimo giorno, non potrà ovviamente essere presente alla fine dell'$(i+1)$-esimo.

   La formula si dimostra per induzione: per $n \geq 1$, dato che $A_{n+1} \subseteq A_n$, si ha $P(A_{n+1}) = P(A_{n+1} \cap A_n) = P(A_n)P(A_{n+1}|A_n)$ e applicando l'ipotesi induttiva per $P(A_n)$ si conclude.

b) Chiaramente $P(A_1) = \frac{1}{2}$, $P(A_2|A_1) = \frac{2}{3}$ e più in generale $P(A_i|A_{i-1}) = \frac{i}{i+1}$. Applicando la formula dimostrata al punto a) si ha dunque

$$P(A_n) \;=\; \frac{1}{2}\,\frac{2}{3}\,\frac{3}{4} \cdots \frac{n}{n+1} \;=\; \frac{1}{n+1}\,.$$

Esercizio 13 * Sia (Ω, P) uno spazio di probabilità uniforme, in cui Ω contiene un numero primo di elementi. Descrivere tutte le coppie di eventi indipendenti.

Soluzione. Supponiamo $|\Omega| > 1$, altrimenti il problema è banale. Siano A e B indipendenti e non vuoti. Allora

$$\frac{|A \cap B|}{|\Omega|} = P(A \cap B) = P(A)P(B) = \frac{|A||B|'}{|\Omega|^2}$$

da cui

$$|A||B| = |A \cap B||\Omega|.$$

Se $|A \cap B| = |A|$ (risp. $= |B|$) si ricava $|B| = |\Omega|$ (risp. $|A| = |\Omega|$), da cui $\mathcal{B} = \Omega$ (risp. $A = \Omega$). Se, invece, $|A \cap B| < |A|$, si ha che $|A|$ e $|B|$ dividono $|\Omega|$, e quindi sono uguali o a 1 o a $|\Omega|$. Si vede che la formula precedente non può essere verificata se $|A| = |B| = 1$, e quindi o $A = \Omega$ o $B = \Omega$. Pertanto, due eventi sono indipendenti se e solo se almeno uno dei due è uguale a Ω o a $\emptyset$.

Esercizio 14 Quante volte è necessario lanciare un dado affinchè la probabilità di ottenere almeno un 6 sia maggiore o uguale a 0.5?
Soluzione. La probabilità di non ottenere alcun 6 in n lanci è $\left(\frac{5}{6}\right)^n$, che è minore di 1/2 per $n \geq 4$.

Esercizio 15 Con 10 proiettili devo colpire 5 bersagli. Ad ogni tiro colpisco un bersaglio con probabilità 1/2, indipendentemente dall'esito degli altri tiri.
a. Qual è la probabilit'a che riesca effettivamente a colpire tutti e cinque i bersagli?
b. Qual è la probabilità che mi avanzino dei proiettili?
Soluzione.
a. La probabilità richiesta è quella di colpire almeno 5 centri in 10 tiri, che vale

$$\sum_{k=5}^{10} \binom{10}{k} \frac{1}{2^k} \frac{1}{2^{10-k}} = \sum_{k=5}^{10} \binom{10}{k} \frac{1}{2^{10}}.$$

b. La probabilità richiesta è quella di colpire almeno 5 centri in 9 tiri, che vale

$$\sum_{k=5}^{9} \binom{9}{k} \frac{1}{2^9} = \frac{1}{2}.$$

Esercizio 16 Un commerciante acquista certe componenti elettriche in egual misura da due fornitori A e B. Viene a sapere che il 15% delle componenti provenienti da B e' difettosa, cioe' si rompono dopo poche ore di utilizzo, contro solo il 3% di quelle provenienti da A. Il commerciante e' in procinto di mettere in vendita una confezione tali componenti, tutte provenienti dallo stesso fornitore, ma di cui non ha registrato la provenienza. Per conoscerne la provenienza ne testa 20, di cui 2 risultano difettose. Con quale grado di confidenza puo' ritenere che la partita gli sia stata fornita da B?
Soluzione. Si considerino gli eventi A = la confezione proviene dal fornitore A, B = la confezione proviene dal fornitore B, C = di 20 pezzi testati 2 sono difettosi. Sappiamo che

$$P(C|A) = \binom{20}{2}(0.15)^2(0.85)^{18} \simeq 0.23, \qquad P(C|B) = \binom{20}{2}(0.03)^2(0.97)^{18} \simeq 0.099,$$

mentre $P(A) = P(B) = 1/2$. Per concludere basta applicare la formula di Bayes:

$$P(B|C) = \frac{P(C|B)P(B)}{P(C|B)P(B) + P(C|A)P(A)} \simeq 0.30.$$

Esercizio 17 Un'azienda produce occhiali utilizzando tre diversi macchinari. Il primo macchinario produce mediamente un paio di occhiali difettosi ogni 100, il secondo ogni 200, il terzo ogni 300. Gli occhiali vengono imballati in scatole identiche, contenenti 100 paia. Ogni scatola contiene occhiali scelti a caso tra quelli prodotti da una sola delle tre macchine. Si supponga che il primo macchinario abbia una produzione doppia rispetto agli altri due, cioè una scatola scelta a caso ha probabilità 1/2 di essere prodotta dal primo macchinario, 1/4 da secondo e 1/4 dal terzo. Un ottico riceve una di queste scatole. Qual è la probabilità che trovi almeno un paio di occhiali difettoso?
Soluzione. Per $i = 1, 2, 3$, sia A_i = i pezzi della scatola sono stati prodotti dall'i-mo macchinario, B = almeno uno degli occhiali della scatola è difettoso. Sappiamo che

$$P(A_1) = 1/2, \; P(A_2) = P(A_3) = 1/4,$$

$$P(B|A_1) = 1 - P(B^c|A_1) = 1 - \left(\frac{99}{100}\right)^{100}, \ P(B|A_2) = 1 - \left(\frac{199}{200}\right)^{100}, \ P(B|A_3) = 1 - \left(\frac{299}{300}\right)^{100}$$

Per concludere, basta usare la formula delle probabilità totali:

$$P(B) = \sum_{i=1}^{3} P(B|A_i)P(A_i).$$

Esercizio 18 Un semplice modello per la distribuzione dei sessi dei figli è il seguente:

- il primo figlio ha proabilità $\frac{1}{2}$ di essere maschio (o femmina).
- La probabilità che l'$n+1$-esimo figlio sia maschio, condizionata ai sessi dei figli precedenti, è $\frac{3}{5}$ se l'n-esimo figlio è maschio, $\frac{2}{5}$ se l'n-esimo figlio è femmina.

Determinare

a) la probabilità che il primo figlio sia maschio condizionata al fatto che il secondo è maschio;

b)* la probabilità che il primo figlio sia maschio condizionata al fatto che il terzo è maschio.

Soluzione.

a) Introduciamo gli eventi A = "il primo figlio è maschio" e B = "il secondo figlio è maschio". I dati del problema ci dicono che $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B|A) = \frac{3}{5}$, $P(B|A^c) = \frac{2}{5}$. La formula delle probabilità totali dà

$$P(B) = P(B|A)P(A) + P(B|A^c)P(A^c) = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{5} + \frac{2}{5}\right) = \frac{1}{2}.$$

Applicando quindi la formula di Bayes si ottiene

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)} = \frac{\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{3}{5}.$$

b) Introducendo l'evento C = "il terzo figlio è maschio", dobbiamo calcolare $P(A|C)$. Si osservi che

$$P(A|C) = P(A \cap B|C) + P(A \cap B^c|C).$$

Per la Formula di Bayes

$$P(A \cap B|C) = \frac{P(C|A \cap B)P(A \cap B)}{P(C)}.$$

Anzitutto

$$P(C|A \cap B) = \frac{3}{5}.$$

Inoltre

$$P(A \cap B) = P(B|A)P(A) = \frac{3}{5}\frac{1}{2} = \frac{3}{10}.$$

Infine, per la formula delle probabilità totali,

$$P(C) = P(C|B)P(B) + P(C|B^c)P(B^c) = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{5} + \frac{2}{5}\right) = \frac{1}{2}.$$

Perciò

$$P(A \cap B|C) = \frac{\frac{3}{5}\frac{3}{10}}{\frac{1}{2}} = \frac{9}{25}.$$

Lo stesso conto con B^c al posto di B conduce a

$$P(A \cap B^c|C) = \frac{4}{25},$$

da cui

$$P(A|C) = \frac{13}{25}.$$

Esercizio 19 Mostrare che se $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sono eventi indipendenti, allora

$$P(\cup_{i=1}^n A_i) = 1 - \prod_{i=1}^n P(A_n^c).$$

Soluzione.

$$P(\cup_i A_i) = 1 - P(\cap_i A_i^c) = 1 - \prod_i P(A_i^c).$$

Esercizio 20 Da un'urna contenente n palline di cui k rosse e $n-k$ verdi, con $1 \leq k \leq n-1$, si estrae una pallina e quindi, senza reimmetterla nell'urna, si estrae una seconda pallina. Si considerino gli eventi informalmente descritti da

$$\begin{aligned} A_1 &= \text{la prima pallina estratta è rossa} \\ A_2 &= \text{la seconda pallina estratta è rossa.} \end{aligned}$$

Mostrare che A_1 e A_2 non sono indipendenti
Soluzione. Basta osservare che

$$P(A_1|A_2) = \frac{k-1}{n-1} \neq \frac{k}{n} = P(A_1).$$

Esercizio 21 Siano $A_1, A_2, \ldots, A_n$ eventi indipendenti tali che $\sum_{i=1}^n P(A_i) \leq 1$. Mostrare che

$$P(A_1 \cap A_2 \cdots \cap A_n) \leq n^{-n}.$$

(Sugg: usare il fatto che se $a_1, \ldots, a_n \geq 0$ allora $(a_1 + \cdots + a_n)/n \geq (a_1 \cdot a_2 \cdots a_n)^{1/n}$.)
Soluzione. Usando l'indipendenza e la disuguaglianza suggerita:

$$P(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1) \cdots P(A_n) = \left(\frac{P(A_1) + \cdots + P(A_n)}{n}\right)^n \leq n^{-n}.$$

Esercizio 22 Il signor A riceve un'informazione che si esprime con un "si'" o con un "no", trasmette tale informazione al signor B, che la trasmette al signor C, che la trasmette al signor D, il quale la annuncia. Ognuno dei quattro signori, indipendentemente dagli altri, mente con probabilità 1/3. Se si sa che D ha annunciato l'informazione corretta, cioè quella che A ha ricevuto, qual è la probabilità che A abbia mentito?
Soluzione. Notare che D dà l'informazione corretta se e solo se il numero di persone che hanno mentito è un numero pari. Sia $E = D$ ha annunciato l'informazione corretta, $F = A$ ha mentito.

$$P(E) = \left(\frac{2}{3}\right)^4 + \binom{4}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^4 \simeq 0.51,$$

$$P(E \cap F) = 3\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^4 \simeq 0.16,$$

da cui si calcola $P(F|E) = P(E \cap F)/P(F) \simeq 0.32$.

Esercizio 23 Si voglia illuminare una stanza con un dato numero di lampadine. La probabilita' che una lampadina sopravviva almeno n giorni e' p^n, ove $p = 0.9$. Si puo' ritenere che le lampadine si comportino in modo indipendente. Quante lampadine devo installare affinche', con probabilita' almeno 0.99, dopo 10 giorni vi sia almeno una lampadina funzionante?
Soluzione. La probabilità che dopo 10 giorni tutte le N lampadine installate abbiano smesso di funzionare è

$$(1 - p^{10})^N \leq 0.01 \iff N \geq \frac{\log(0.01)}{\log(1 - p^{10})}.$$

Esercizio 24 Il signor Bianchi da Roma e il signor Rossi da Milano decidono di incontrarsi a Roma. All'ultimo momento, Rossi, che è un tipo molto indeciso, rimette al caso la decisione di partire, lanciando una moneta. Successivamente, in caso di esito positivo, per scegliere quale dei 6 treni a sua disposizione prendere, tira un dado. Ora, se Bianchi va in stazione e osserva che Rossi non è su nessuno dei primi 5 treni, qual è la probabilità che Rossi arrivi con l'ultimo treno?
Soluzione.
Siano

$T_i \equiv$ "*Rossi parte con l'i-esimo treno*",

$V \equiv$ "*Rossi parte per Roma*",

$N \equiv$ "*Rossi non prende nessuno dei primi 5 treni*"

$$P(T_i) = P(T_i|V)P(V) = \frac{1}{6}\frac{1}{2} = \frac{1}{12}$$
$$P(N) = P(V^c) + P(T_6) = \frac{1}{2} + \frac{1}{12} = \frac{7}{12}$$
$$P(T_6 \mid N) = \frac{P(N \mid T_6)P(T_6)}{P(N)} = \frac{1 \cdot \frac{1}{12}}{\frac{7}{12}} = \frac{1}{7}.$$

Esercizio 25 In un labirinto a T, ad un animale da laboratorio si dà la possibilità di andare a sinistra e ricevere cibo o di andare a destra e ricevere una leggera scossa elettrica. Assumete che prima di ogni condizionamento (nel tentativo 1) sia ugualmente probabile che gli animali vadano a destra o a sinistra. Dopo aver ricevuto il cibo ad un certo tentativo, le probabilità di andare a sinistra e a destra diventano 0.6 e 0.4, rispettivamente, per il tentativo successivo. Invece, dopo aver ricevuto una scossa elettrica ad un certo tentativo, le probabilità di andare a sinistra e a destra al tentativo successivo diventano rispettivamente 0.8 e 0,2, rispettivamente.

1. Qual è la probabilità che l'animale vada a sinistra al tentativo numero 2?
2. E al numero 3?
3. Se dopo il secondo tentativo si osserva che l'animale è a sinistra, qual è la probabilità che l'animale abbia ricevuto cibo prima dell'ultimo movimento?

Soluzione.

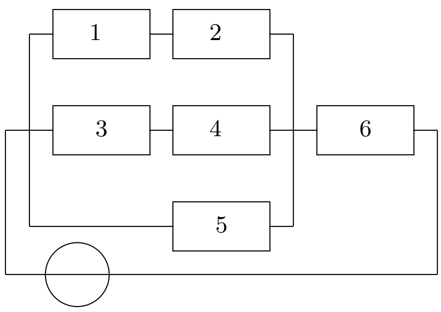
S_i : "i-esimo passo della cavia verso sinistra', $i = 1, \dots$

D_i : "i-esimo passo della cavia verso destra", $i = 1, \dots$

$P(S_1) = P(D_1) = 1/2$,
$P(S_{i+1}|S_i) = 0.6 \ \forall i = 1, \dots$,
$P(S_{i+1}|D_i) = 0.6, \ \forall i = 1, \dots$

1. $P(S_2) = P(S_2 \mid S_1)P(S_1) + P(S_2 \mid D_1)P(D_1) = 0.7 \Rightarrow \quad P(D_2) = 1 - P(S_2) = 0.3$
2. $P(S_3) = P(S_3 \mid S_2)P(S_2) + P(S_3 \mid D_2)P(D_2) = 0.6 \cdot 0.7 + 0.8 \cdot 0.3 \cdot 33/50.$
3. $P(S_1 \mid S_2) = \frac{P(S_2|S_1)P(S_1)}{P(S_2)} = 3/7.$

Esercizio 26 Si determini la probabilità che il circuito in figura sia "chiuso" supponendo che ciascun interruttore del circuito sia chiuso in modo indipendente e che la probabilità che l'i-esimo interruttore sia chiuso sia p_i, $i = 1, \dots, 6$.



Soluzione.

Sia A l'evento "il circuito è chiuso", e A_i, $i = 1, \dots, 6$ l'evento "l'interruttore i-esimo è chiuso", allora,

$$\begin{aligned} A &= (A_1 \cap A_2 \cap A_6) \cup (A_3 \cap A_4 \cap A_6) \cup (A_5 \cap A_6) \\ &= [(A_1 \cap A_2) \cup (A_3 \cap A_4) \cup A_5] \cap A_6, \end{aligned}$$

quindi

$$\begin{aligned}P(A) &= P((A_1 \cap A_2) \cup (A_3 \cap A_4) \cup A_5)P(A_6)\\ &= (p_1p_2 + p_3p_4 + p_5 - p_1p_2p_5 - p_3p_4p_5 - p_1p_2p_3p_4 + p_1p_2p_3p_4p_5)p_6.\end{aligned}$$

Esercizio 27 Un sistema ingegneristico di n componenti è detto sistema "k-su-n" se il sistema funziona se è solo se almeno k componenti su n funzionano. Supponiamo che tutte le componenti funzionino indipendentemente una dall'altra. Se l'i-esima componente funziona con probabilità p_i, qual è la probabilità che un sistema 2-su-4 funzioni?
Soluzione.

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Pr}(\text{ 2 -su-4 funzioni}) =\\
&= \mathrm{Pr}(\text{almeno 2 componenti su 4 funzionano})\\
&= 1 - \mathrm{Pr}(\text{al più 1 componente su 4 funziona}) =\\
&= 1 - \Big[\mathrm{Pr}(\text{non funziona nessuna componente })+\\
&+ \mathrm{Pr}(\text{funziona esattamente 1 componente})\Big] =\\
&= 1 - \prod_{i=1}^{4}(1-p_i) - p_1(1-p_2)(1-p_3)(1-p_4)+\\
&- p_2(1-p_1)(1-p_3)(1-p_4) - p_3(1-p_1)(1-p_2)(1-p_4) - p_4(1-p_2)(1-p_3)(1-p_1)
\end{aligned}$$

Se $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = 2/3$, allora $\mathrm{Pr}(\text{ 2 -su- 4 funzioni}) = \frac{8}{9}$.

Esercizio 28 Siano date 2 urne U_1, U_2 tali che U_1 contiene 1 pallina bianca e 4 palline nere, U_2 contiene 5 palline bianche e 5 nere. Un giocatore estrarre a caso 2 palline, seguendo una certa strategia, e vince 100.000 Lit se le due palline sono dello stesso colore.

1. Quale delle seguenti tre strategie è preferibile per il giocatore:
   - (a) Il giocatore sceglie a caso l'urna lanciando una moneta, estrae una pallina dall'urna, la rimette nell'urna, rilancia la moneta per scegliere nuovamente l'urna, quindi estrae la 2^a pallina.
   - (b) Il giocatore sceglie a caso un'urna, estrae una pallina, la rimette nell'urna, quindi effettua l'estrazione della seconda pallina dalla stessa urna.
   - (c) Il giocatore sceglie a caso un'urna, estrae una pallina, quindi effettua l'estrazione della seconda pallina dall'altra urna.
2. Qual è la probabilità di vincere se le due estrazioni con reimmissione avvengono da un'unica urna contenente il tolale delle palline bianche e nere delle due urne?

Soluzione.

1. L'insieme degli eventi elementari relativo all'esperimento "estrazione di 2 palline", è $\Omega = \{bb, bn, nb, nn\}$, indipendentemente dalla strategia adottata per selezionare le urne. Indichiamo con V_i l'evento "Vincere con la i-esima strategia," $i = 1, 2, 3$.

(a) Con la prima strategia si hanno le seguenti 4 possibilità per selezionare le urne:

$$H_1 = U_1U_1, \quad H_2 = U_1U_2, \quad H_3 = U_2U_1, \quad H_4 = U_2U_2$$

con $\Pr(H_1) = \Pr(H_2) = \Pr(H_3) = \Pr(H_4) = 1/4$, dal momento che le scelte derivano da 2 lanci di 1 moneta regolare. Quindi,

$$\Pr(\{bb\}) = \sum_{i=1}^{4} \Pr(\{bb\}|H_i)\Pr(H_i);$$

$$\begin{aligned}
&\Pr(\{bb\}|H_1) = \\
&\quad = \Pr(\text{“estrarre con reimmissione 2 palline bianche dalla prima urna”}) \\
&\quad = \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5} = \frac{1}{25}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Pr(\{bb\}|H_2) = \\
&\quad = \Pr(\text{“estrarre 1 pallina bianca dalla prima urna e 1 nera dalla seconda”}) \\
&\quad = \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{10} = P(\{bb\}|H_3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Pr(\{bb\}|H_4) = \\
&\quad = \Pr(\text{“estrarre con reimmissione 2 palline bianche dalla seconda urna”}) \\
&\quad = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

Quindi $\Pr(\{bb\}) = 49/400$.
Allo stesso modo si dimostra che $\Pr(\{nn\}) = 1/4(16/25 + 4/5 + 1/4) = 169/400$, da cui: $\Pr(V_1) = 218/400 = \frac{109}{200} = 0.545$.

(b) Con la seconda strategia, una volta effettuata la scelta dell'urna per la prima estrazione, si effettueranno 2 estrazioni da quell'urna con reimmissione. Così,

$$\begin{aligned}
\Pr(\{bb\}) &= \Pr(\{bb\}|U_1)P(U_1) + \Pr(\{bb\}|U_2)\Pr(U_2) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}\frac{1}{5} + \frac{1}{2}\frac{1}{2}\right) = \frac{29}{200} \\
\Pr(\{nn\}) &= \Pr(\{nn\}|U_1)\Pr(U_1) + \Pr(\{nn\}|U_2)P(U_2) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{4}{5}\frac{4}{5} + \frac{1}{2}\frac{1}{2}\right) = \frac{89}{200} \\
\Pr(V_2) &= \frac{118}{200} = \frac{59}{100} = 0.59.
\end{aligned}$$

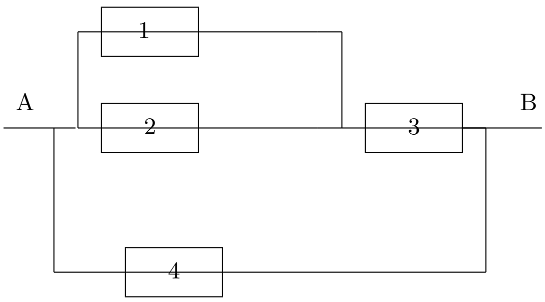
(c) Con la terza strategia, scelta l'urna per la prima estrazione, si effettuera la seconda estrazione dall'altra urna. Così,

$$\begin{aligned}
\Pr(\{bb\}) &= \Pr(\{bb\}|U_1U_2)\Pr(U_1) + \Pr(\{bb\}|U_2U_1)\Pr(U_2) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{5}\right) = \frac{1}{10} \\
\Pr(\{nn\}) &= \Pr(\{nn\}|U_1U_2)\Pr(U_1) + \Pr(\{nn\}|U_2U_1)\Pr(U_2) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{4}{5}\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{4}{5}\right) = \frac{2}{5} \\
\Pr(V_3) &= \frac{1}{10} + \frac{2}{5} = \frac{1}{2} = 0.5.
\end{aligned}$$

È preferibile la seconda strategia.

2. Sia U_3 un'urna che contiene 6 palline bianche e 9 palline nere. Con quest'urna, si ha $\Pr(\text{“vincere”}) = (6/15)^2 + (9/15)^2 = \frac{13}{25} = 0.52$.

Esercizio 29 Un congegno elettronico è strutturato come nel seguente diagramma



Il segnale entra attraverso A e raggiunge B se *almeno* uno dei percorsi segnati è “aperto”. Ognuna delle componenti $1, 2, 3$ e 4 ha probabilità $p \in (0, 1)$ di essere “chiusa”, indipendentemente dalle altre.

a. Qual è la probabilità che il congegno funzioni, cioè che il segnale entrante in A raggiunga B?

b. Sapendo che il segnale ha raggiunto B, qual è la probabilità che la componente 4 sia aperta?

Soluzione. a. Le componenti 1 e 2 sono in parallelo, quindi la probabilità che il sottosistema da esse costituito non funzioni è p^2. La componente 3 e‘ in serie alle componenti 1 e 2. Quindi la probabilità che il sottosistema costituito dalle componenti 1,2,3 non funzioni è $1 - (1 - p^2)(1 - p) = p + p^2 - p^3$. Infine, la componente 4 e‘ in parallelo alle altre, quindi la probabilità che l'intero congegno non funzioni è $p(p + p^2 - p^3) = p^2 + p^3 - p^4$. Dunque, la probabilità che il congegno funzioni è $1 - p^2 - p^3 + p^4$.

b. Sia C = “la componente 4 è aperta”, e D = “il congegno funziona”. Notare che $C \cap D = C$ (se la componente 4 è aperta il congegno funziona). Pertanto

$$P(C|D) = \frac{P(C)}{P(D)} = \frac{1 - p}{1 - p^2 - p^3 + p^4}.$$

Esercizio 30 In una partita a Poker con 32 carte (8 per seme) ad un giocatore ne vengono servite 5. Si considerino gli eventi A = "il giocatore riceve almeno due assi", B = "il giocatore riceve almeno un asso", C = "il giocatore riceve l'asso di cuori". Calcolare $P(A|B)$ e $P(A|C)$.

Soluzione. Poiché $A \subseteq B$, si ha $P(A|B) = \frac{P(A)}{P(B)}$. Per calcolare tali probabilità, ci mettiamo nello spazio campionario Ω = insieme dei sottoinsiemi di 5 carte, con la probabilità uniforme. L'evento B^c corrisponde ai sottoinsiemi che non contengono assi. Si ha

$$P(B) = 1 - P(B^c) = 1 - \frac{|B|}{|\Omega|} = 1 - \frac{\binom{28}{5}}{\binom{32}{5}}.$$

Scrivendo $A^c = B^c \cup (A^c \setminus B^c)$, si ha che

$$P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - [P(B^c) + P(A^c \setminus B^c)] = P(B) - P(A^c \setminus B^c).$$

Quindi resta da calcolare $P(A^c \setminus B^c)$. L'evento $A^c \setminus B^c$ è costituito dai sottoinsiemi di 5 carte che contengono esattamente un asso. Pertanto

$$|A^c \setminus B^c| = 4\binom{28}{4}$$

da cui

$$P(A^c \setminus B^c) = \frac{4\binom{28}{4}}{\binom{32}{5}}.$$

A questo punto si calcolano facilmente $P(A)$ e $P(A|B)$.
Per calcolare $P(A|C) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)}$ è necessario determinare $|C|$ e $|A \cap C|$. Contare gli elementi di C equivale a contare i sottoinsiemi di 4 elementi delle 31 carte ottenute eliminando l'asso di cuori dal mazzo originale. Pertanto

$$|C| = \binom{31}{4}.$$

Contare gli elementi di $A \cap C$ equivale a contare i sottoinsiemi di 4 elementi delle 31 carte appena menzionate che contengono almeno un asso. Ripetendo lo spesso ragionamento visto prima, si ha

$$|A \cap C| = \binom{31}{4} - \binom{28}{4}.$$

Perciò

$$P(A|C) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)} = \frac{|A \cap C|}{|C|} = 1 - \frac{\binom{28}{4}}{\binom{31}{4}}.$$

Esercizio 31 Siano $U_0, U_1, \ldots, U_N$ delle urne contenenti ognuna N palline. L'urna U_k contiene k palline rosse e $N - k$ palline verdi. Si sceglie a caso un'urna, e da essa vengono effettuate estrazioni successive *con reimmissione*.

a. Determinare la probabilità (in termini di una sommatoria) che le palline estratte nelle prime n estrazioni siano tutte rosse (sugg.: usare la formula di disintegrazione).

b. Determinare la probabilità che la $n+1$-ma pallina estratta sia rossa condizionata al fatto che le prime n palline estratte sono tutte rosse.

c. * Mostrare che il limite per $N \to +\infty$ della probabilità condizionata al punto b. vale $\frac{n+1}{n+2}$.

Soluzione. a. Sia A_n l'evento in questione, e $B_k =$ "l'urna prescelta è U_k". Per la formula di disintegrazione

$$P(A_n) = \sum_{k=0}^{N} P(A_n|B_k)P(B_k).$$

Inoltre, ovviamente, $P(A_n|B_k) = \left(\frac{k}{N}\right)^n$, e $P(B_k) = \frac{1}{N+1}$. Dunque

$$P(A_n) = \frac{1}{N+1}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{N}\right)^n.$$

b. Basta osservare che la probabilità condizionata da calcolare vale $\frac{P(A_{n+1})}{P(A_n)}$, e usare il risultato in a.

c. Per le proprietà dell'integrale di Riemann, e il fatto che $\lim_{N\to+\infty}\frac{N}{N+1} = 1$, si ha

$$\lim_{N\to+\infty}\frac{1}{N+1}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{N}\right)^n = \lim_{N\to+\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{N}\right)^n = \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}.$$

Si conclude usando quanto visto in a. e b.

Esercizio 32 Mostrare la *formula di disintegrazione per probabilità condizionate*, cioè, dati tre eventi A, B, C tali che $P(B\cap C) > 0$ e $P(B \cap C^c) > 0$, si ha

$$P(A|B) = P(A|B\cap C)P(C|B) + P(A|B\cap C^c)P(C^c|B).$$

Soluzione. Non è difficile verificarlo usando la definizione di probabilità condizionata. Un altro modo è il seguente. Per un generico evento E definiamo $Q(E) := P(E|B)$. Sappiamo che Q è una probabilità. Si vede subito che

$$Q(A|C) = P(A|B\cap C) \ \text{ e } \ Q(A|C^c) = P(A|B\cap C^c).$$

Quindi la formula da dimostrare non è altro che la formula di disintegrazione per la probabilità Q.

Esercizio 33 * Si consideri il seguente modello di distribuzione dei figli nei nuclei familiari. La probabilità che un nucleo familiare scelto a caso abbia n figli, con $n \geq 0$, è $e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}$, dove $\lambda > 0$. Supponiamo inoltre che ogni figlio sia maschio con probabilità $1/2$, indipendentemente da tutti gli altri figli. Fissato $k \geq 0$, sia A_k l'evento "il nucleo familiare scelto (a caso) ha esattamente k figli maschi". Mostrare che $P(A_k) = e^{-\lambda/2}\frac{(\lambda/2)^k}{k!}$. (sugg.: sia $B_n =$ "il nucleo familiare scelto ha n figli. Prima determinare $P(A_k|B_n)$ e poi calcolare $P(A_k)$ con la formula di disintegrazione

$$P(A_k) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_k|B_n)P(B_n).$$

Ricordare la serie esponenziale $e^\lambda = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!}$.

Soluzione. Dalle ipotesi del modello segue che, se $n \geq k$,

$$P(A_k|B_n) = \frac{1}{2^n}\binom{n}{k}.$$

Ovviamente, $P(A_k|B_n) = 0$ se $k > n$. Pertanto

$$\begin{aligned}
P(A_k) &= \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_k|B_n)P(B_n) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{2^n}\binom{n}{k} e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!} \\
&= e^{-\lambda}\frac{1}{2^k}\frac{\lambda^k}{k!}\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{1}{2^{n-k}}\frac{\lambda^{n-k}}{(n-k)!} = e^{-\lambda}\frac{(\lambda/2)^k}{k!}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(\lambda/2)^n}{n!} = e^{-\lambda/2}\frac{(\lambda/2)^k}{k!}
\end{aligned}$$

Esercizio 34 Sia $S = \{1, 2, \dots, n\}$, $\Omega := \mathcal{P}(S) \times \mathcal{P}(S)$, e P la probabilità uniforme su Ω. Dunque gli elementi di Ω sono coppie ordinate (A, B), con $A, B \subseteq S$. Consideriamo l'evento

$$E := \{(A, B) \in \Omega : A \subseteq B\}.$$

Inoltre, se $B \subseteq S$, sia $F_B := \{(A, B) : A \subset \Omega$.

a. Determinare $P(E|F_B)$.

b. * Usando la formula di disintegrazione

$$P(E) = \sum_{B \subseteq S} P(E|F_B)P(F_B),$$

mostrare che $P(E) = (3/4)^n$ (ricordare che $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$).

Soluzione. a. Anzitutto

$$P(E|F_B) = \frac{|E \cap F_B|}{|F_B|}.$$

Gli elementi di F_B sono tanti quanti i sottoinsiemi di S, cioè 2^n. Gli elementi di $E \cap F_B$ sono tanti quanti i sottoinsiemi di B, cioè $2^{|B|}$. Dunque

$$P(E|F_B) = \frac{2^{|B|}}{2^n}.$$

b. Essendo $P(F_B) = |F_B|/|\Omega| = 1/2^n$, si ha

$$P(E) = \sum_{B \subseteq S} \frac{2^{|B|}}{4^n} = \frac{1}{4^n}\sum_{k=0}^n \sum_{B \subseteq S : |B| = k} 2^k = \frac{1}{4^n}\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k = \frac{3^n}{4^n}.$$

Esercizio 35 Sia S_n l'insieme delle permutazioni di $\{1, 2, \ldots, n\}$, e P la probabilità uniforme su S_n. Siano $A = \{\sigma \in S_n : \sigma(1) < \sigma(2)\}$, $B_k = \{\sigma \in S_n : \sigma(2) = k\}$, $C = \{\sigma : \sigma(1) + \sigma(2) \geq n\}$.

a. Calcolare, per $k = 2, \ldots, n$, la probabilità condizionata $P(B_k|A)$.

b. Calcolare $P(C)$ (ricordare che $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$).

Soluzione.

a. Per simmetria, $P(A) = 1/2$. Inoltre

$$P(A \cap B_k) = \frac{(k-1)[(n-2)!]}{n!} = \frac{k-1}{n(n-1)}.$$

Perciò

$$P(B_k|A) = \frac{2(k-1)}{n(n-1)}.$$

b. Notare che C si può scrivere come unione disgiunta $C = \bigcup_{k=1}^{n} C_k$ dove

$$C_k := \{\sigma : \sigma(1) = k, \, \sigma(2) \geq n-k\}.$$

Si noti che, se $k < \frac{n}{2}$, $|C_k| = (k+1)[(n-2)!]$, $|C_k| = k[(n-2)!]$ se $\frac{n}{2} \leq k < n$, $|C_n| = (n-1)!$. Quindi, se n è pari,

$$\begin{aligned}\frac{|C|}{(n-2)!} &= \sum_{1 \leq k < \frac{n}{2}} (k+1) + \sum_{\frac{n}{2} \leq k \leq n-1} k + n - 1 \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} k + \frac{n}{2} - 1 + n - 1 = \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n}{2} + n - 2 = \frac{n^2 + 2n - 4}{2},\end{aligned}$$

da cui $P(C) = \frac{n^2+2n-4}{2n(n-1)}$. Se invece n è dispari

$$\frac{|C|}{(n-2)!} = \sum_{1 \leq k < \frac{n}{2}} (k+1) + \sum_{\frac{n}{2} \leq k \leq n-1} k + n - 1 = \sum_{k=1}^{n-1} k + \frac{n-1}{2} + n - 1 = \frac{(n-1)(n+3)}{2},$$

da cui $P(C) = \frac{n+3}{2n}$.

Esercizio 36 È stato indetto un referendum in una popolazione di $n \geq 1$ individui (tutti aventi diritto al voto). Ciascun individuo andrà a votare con probabilità $\frac{1}{2}$, indipendentemente dagli altri. Inoltre, se un individuo andrà a votare, voterà SÌ con probabilità $\frac{1}{2}$, indipendentemente dagli altri.

a) Si fissi un individuo. Qual è la probabilità p che egli vada a votare e voti SÌ?

b) Qual è la probabilità che il numero di voti SÌ sia k, per $k \in \{0, \ldots, n\}$? (*Sugg.*: può essere utile basarsi sulla risposta data al punto precedente.)

c) Assumendo che i voti SÌ siano k, si determini la probabilità (condizionata) che i votanti totali siano m, dove $m \in \{k, \ldots, n\}$. Si mostri che tale probabilità vale

$$\binom{n-k}{m-k} \left(\frac{1}{3}\right)^{m-k} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-m} .$$

Soluzione.

a) Consideriamo gli eventi A = "l'individuo va a votare" e B = "l'individuo vota SÌ". Allora

$$p = P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} .$$

b) Dobbiamo calcolare la probabilità dell'evento C = "esattamente k individui vanno a votare e votano SÌ". Dato che ciascun individuo, indipendentemente dagli altri, va a votare e vota SÌ con probabilità $p = \frac{1}{4}$, siamo in presenza di uno schema di prove ripetute e indipendenti: dunque

$$P(C) = \binom{n}{k} \left(\frac{1}{4}\right)^{k} \left(\frac{3}{4}\right)^{n-k} .$$

c) Introducendo l'evento D = "esattamente m individui vanno a votare", dobbiamo calcolare $P(D|C)$. Applicando la formula di Bayes

$$P(D|C) = \frac{P(C|D) \cdot P(D)}{P(C)} .$$

Applicando lo schema di prove ripetute e indipendenti si ha

$$P(D) = \binom{n}{m} \left(\frac{1}{2}\right)^{n} , \qquad P(C|D) = \binom{m}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^{m} ,$$

mentre $P(C)$ è stata determinata al punto precedente. Sostituendo ed effettuando le opportune semplificazioni, si trova

$$P(D|C) = \frac{\binom{m}{k}\binom{n}{m}}{\binom{n}{k}} \cdot \frac{(\frac{1}{2})^m (\frac{1}{2})^n}{(\frac{1}{3})^k (\frac{3}{4})^{n-k}} = \binom{n-k}{m-k} \left(\frac{1}{3}\right)^{m-k} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-m} .$$

Esercizio 37 Una Compagnia di Assicurazioni offre una polizza che prevede il pagamento di una cifra forfettaria C a fronte di un danno subito dal cliente. La Compagnia classifica gli assicurati in tre categorie: "basso rischio", "medio rischio" e "alto rischio". Dei suoi assicurati, il 75% sono a "basso rischio", il 20% a "medio rischio" e il restante 5% ad "alto rischio". Gli assicurati a "basso rischio" hanno una probabilità pari a 0.02 di subire un danno che prevede il pagamento dell'assicurazione. Tale probabilità è pari a 0.1 per gli assicurati a "medio rischio" e a 0.2 per quelli ad "alto rischio".

i) Qual è la probabilità che un individuo scelto a caso tra gli assicurati reclami il pagamento dell'assicurazione?

ii) Se un individuo reclama il pagamento dell'assicurazione, qual è la probabilità che sia nella categoria ad "alto rischio"?

Soluzione.

i) Consideriamo gli eventi: A_1 = "l'individuo scelto è della categoria "basso rischio"; A_2 = "l'individuo scelto è della categoria "medio rischio"; A_3 = "l'individuo scelto è della categoria "alto rischio"; B = "l'individuo reclama il pagamento dell'assicurazione". Sappiamo che

$$P(B|A_1) = 0.02 \quad P(B|A_2) = 0.1 \quad P(B|A_3) = 0.2$$

$$P(A_1) = 0.75 \quad P(A_2) = 0.2 \quad P(A_3) = 0.05.$$

Per la formula delle probabilità totali

$$P(B) = \sum_{i=1}^{3} P(B|A_i)P(A_i) = 0.02 \cdot 0.75 + 0.1 \cdot 0.2 + 0.2 \cdot 0.05 = 0.045.$$

ii) Usando la Formula di Bayes,

$$P(A_3|B) = \frac{P(B|A_3)P(A_3)}{P(B)} = \frac{0.2 \cdot 0.05}{0.045} = \frac{2}{9}.$$

Esercizio 38 Al tavolo di un bistrot alcuni avventori giocano a dadi. Ciascun giocatore ha a disposizione un dado equilibrato a sei facce: se ottiene 5 oppure 6, lancia nuovamente il dado; la prima volta che ottiene 1, 2, 3 oppure 4, passa il turno al giocatore seguente. Il punteggio ottenuto da un giocatore in un turno è pari alla somma degli esiti dei lanci effettuati.

1. Si determini la probabilità che il turno di un giocatore duri n lanci, per $n \in \{1, 2, 3, \ldots\}$.
2. Se il turno di un giocatore dura due lanci, qual è la probabilità che il punteggio da lui ottenuto sia dispari?
3. Qual è la probabilità che un giocatore ottenga un punteggio pari a 5? E pari a 11?

Soluzione.

1. Il turno di un giocatore dura n lanci se nei primi $n-1$ lanci esce 5 oppure 6, mentre nell'n-esimo lancio esce un numero tra 1 e 4. In ogni lancio, la probabilità di ottenere un numero tra 1 e 4 vale $\frac{2}{3}$, mentre la probabilità di ottenere 5 oppure 6 vale $\frac{1}{3}$. Dato che i lanci sono indipendenti, segue che la probabilità che il turno duri n lanci vale $(\frac{1}{3})^{n-1}\frac{2}{3}$.
2. Sia $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ lo spazio campionario che descrive gli esiti possibili di due lanci di dadi, munito della probabilità uniforme. Introdotti gli eventi A = "il turno dura due lanci" e B = "il punteggio ottenuto è pari" si ha

$$A \;=\; \big\{(i,j) \in \Omega : \, i \in \{5,6\} \text{ e } j \in \{1,2,3,4\}\big\}\,,$$

$$A \cap B \;=\; \big\{(i,j) \in \Omega : \; i \in \{5,6\}, \; j \in \{1,2,3,4\} \text{ e } i+j \text{ è pari}\big\} \,.$$

Chiaramente $|A| = 2 \cdot 4 = 8$, $|A \cap B| = 4$ e dunque

$$P(B|A) \;=\; \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \;=\; \frac{|A \cap B|}{|A|} \;=\; \frac{1}{2} \,.$$

3. Non è possibile che il punteggio totale sia pari a 5 (la probabilità richiesta è dunque pari a zero). Infatti, se il primo lancio dà come esito un numero tra 1 e 4, il turno termina con un punteggio minore di 5; se invece l'esito del primo lancio è 5 oppure 6, bisogna effettuare (almeno) un altro lancio e il punteggio totale è dunque maggiore di 5.

   Affinché il punteggio totale sia 11, il primo lancio deve dare come esito 5 oppure 6 (altrimenti il turno finirebbe). Tuttavia, se l'esito del primo lancio fosse 6, non sarebbe possibile ottenere come punteggio totale 11, poiché:

   - se il secondo lancio desse come esito un numero tra 1 e 4, il turno terminerebbe senza raggiungere 11;
   - se desse come esito 5, il punteggio salirebbe a 11 ma si dovrebbe tirare il dado un'altra volta, superando dunque il valore di 11;
   - se desse come esito 6, il valore 11 sarebbe già superato al secondo lancio.

   Quindi, per ottenere un punteggio totale pari a 11, il primo lancio deve dare come esito 5. Con analoghi ragionamenti, ci si convince che il secondo lancio deve necessariamente dare come esito 5 e il terzo lancio 1. In altri termini, il punteggio totale è pari a 11 se e soltanto se il primo lancio dà come esito 5, il secondo lancio dà come esito 5 e il terzo lancio dà come esito 1: la probabilità richiesta vale dunque $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{216}$.

Esercizio 39 Si considerino due dadi regolari a 6 facce. Il dado A è tale che su una faccia appare il numero 6 mentre sulle altre appare il numero 3. Nel dado B, tre facce hanno il numero 5 e tre il numero 2. Si lanciano i due dadi.

1. Qual è la probabilità che il punteggio più alto sia ottenuto col dado A?

2. Supponiamo di sapere che il punteggio più alto è ottenuto col dado A. Qual è la probabilità che il punteggio ottenuto col dado A sia 6?

Soluzione.

1. Introduciamo gli eventi $C :=$ "il dado A dà come punteggio 6", $D :=$ "il dado B dà come punteggio 5" ed $E :=$ "il punteggio più alto è ottenuto col dado A". Chiaramente $P(C) = \frac{1}{6}$, $P(D) = \frac{1}{2}$ e $E = C \cup (C^c \cap D^c)$, da cui

$$P(E) \;=\; P(C) \,+\, P(C^c \cap D^c) \;=\; P(C) \,+\, P(C^c)\, P(D^c) \;=\; \frac{1}{6} + \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{2} \;=\; \frac{7}{12} \,.$$

2. Per la formula di Bayes

$$P(C|E) \;=\; \frac{P(E|C)P(C)}{P(E)} \;=\; \frac{P(C)}{P(E)} \;=\; \frac{1/6}{7/12} \;=\; \frac{2}{7} \,,$$

   dove si è usato il fatto che $P(E|C) = 1$.